

Capítulo 3

O Método Primal Simplex

3.1. Introdução

Neste Capítulo, apresenta-se o método de resolução de problemas de programação linear mais utilizado, isto é, o método primal simplex. Assim, apresenta-se todos os detalhes teóricos relacionados com o método primal simplex de forma a permitir uma compreensão plena dessa importante ferramenta de otimização. Nesse contexto, inicialmente apresentamos dois teoremas importantes relacionados com a otimalidade de um problema de programação linear. Assim, deve-se encontrar as condições nas quais um problema de programação linear é ilimitado (não tem solução ótima finita) ou quando apresenta solução ótima finita. Mais importante ainda, prova-se que se um problema de programação linear tem ótimo finito, então um ponto extremo deve ser ótimo do problema de programação linear. Essa propriedade é fundamental na construção do método primal simplex já que essa propriedade sugere que a solução ótima de um problema de programação linear deve ser procurada apenas nos pontos extremos. Esses dois teoremas são provados de forma trivial encontrando um problema linear equivalente ao problema original de programação linear e com a ajuda do Teorema Geral da Representação. Esse tipo de problema de programação linear equivalente chamamos de Problema de Programação Linear Equivalente Número 1 (PLE No. 1).

Após provar que o ótimo finito de um problema de programação linear é um ponto extremo, então o método primal simplex precisa de um ponto extremo para iniciar o processo de otimização. Portanto, no desenvolvimento do método primal simplex apresentado neste capítulo, o processo de otimização é iniciado com a informação fornecida de um ponto extremo. Caso não exista um ponto extremo disponível, deve-se desenvolver uma estratégia especial para encontrar um ponto extremo e esse tópico é desenvolvido no próximo capítulo. Também neste estágio, deve-se montar um modelo padrão de problemas de programação linear, isto é, deve-se escolher um tipo de estrutura chamado de modelo padrão que basicamente consiste em transformar todas as restrições em restrições de igualdade ($Ax = b$) e as variáveis em variáveis não negativas ($x \geq 0$). Assim, se um problema de programação linear não está padronizado, então o passo inicial deve ser padronizar esse problema. Essa estrutura é preferível e chamada de padrão porque nessa estrutura podemos realizar as operações elementares de matrizes sem problemas e, principalmente, porque precisamos caracterizar um ponto extremo desde um ponto de vista algébrico. Nesse contexto aparece o conceito de solução básica factível como sendo totalmente equivalente a ponto extremo. A equivalência entre os conceitos de ponto extremo apresentados no capítulo anterior e o conceito

de solução básica factível apresentada neste capítulo é totalmente fundamental para entender plenamente a teoria relacionada com o método simplex de resolução de problemas de programação linear e para provar muitos teoremas relacionados com problemas de programação linear.

Após aceitar que existe um ponto extremo disponível para um problema de programação linear, o próximo passo consiste em provar se esse ponto extremo é ótimo ou não é ótimo. Essa prova é possível, isto é, se conhecemos um ponto extremo então, de forma trivial, pode-se provar se esse ponto extremo é ótimo ou não é ótimo. Deve-se enfatizar que essa prova é realizada apenas conhecendo o ponto extremo em análise e sem conhecer os outros pontos extremos. Essa propriedade é provada montando o chamado problema de programação linear equivalente número 2 (PL Equivalente No. 2).

Se for verificado que o ponto extremo disponível é ótimo do problema de programação linear (verificação realizada usando o PL Equivalente No. 2), então foi encontrada a solução ótima do problema de programação linear. Em caso contrário, deve-se encontrar uma estratégia para passar do ponto extremo corrente para um ponto extremo adjacente e de melhor qualidade. Essa estratégia é desenvolvida a partir do PL Equivalente No. 2. Assim, a partir de um ponto extremo que não é ótimo, pode-se passar para um ponto extremo adjacente e de melhor qualidade que o ponto extremo corrente. Na continuação, verificamos se esse novo ponto extremo é ótimo. Se não for ótimo, então passamos para um novo ponto extremo adjacente e de melhor qualidade. Repetindo essa estratégia encontramos o ponto extremo ótimo em um número finito de passos porque o número de pontos extremos é finito de acordo com o Teorema Geral da Representação. Nessa estratégia de passagem de um ponto extremo para um ponto extremo adjacente e de melhor qualidade, deve-se incorporar um mecanismo que permita verificar se o problema de programação linear é ilimitado.

Em resumo, o método primal simplex inicia o processo de otimização de um problema de programação linear a partir de um ponto extremo que deve estar disponível. Assim, inicialmente verifica se esse ponto extremo é ótimo ou não é ótimo. Se não for ótimo, então o método encontra um novo ponto extremo que é adjacente e de melhor qualidade. Essa estratégia permite resolver o problema em um número finito de passos e encontrando o ponto extremo ótimo ou informando que o problema é ilimitado. Finalmente, esse PL Equivalente No. 2 é colocado em formato de quadro, chamado de quadro simplex, que é a estrutura mais usada para implementar o método primal simplex. Ao contrário de outros livros, neste livro foi incorporado o nome primal para denominar o método principal para resolver problemas de programação linear. Posteriormente, apresenta-se um método alternativo chamado de Método Dual Simplex. Assim desde o início chamamos o método simplex como Método Primal Simplex.

3.2. Prova de Otimalidade do Método Simplex

Nesta Seção, apresentamos a teoria básica relacionada com a otimalidade de problemas de programação linear. Assim, deve-se provar as condições nas quais um problema é ilimitado e as condições nas quais um problema de programação linear tem ótimo finito. Adicionalmente, se for verificado que o ótimo de um problema de programação linear é finito, então deve-se provar que um ponto extremo deve ser ótimo do problema de programação linear. Para realizar essas provas de forma trivial, precisamos encontrar um problema de programação linear equivalente, chamado

de PL Equivalente No. 1, que representa um t3pico muito importante deste Cap3tulo.

3.2.1. Primeiro Problema Equivalente de Programação Linear

Um problema de programação linear padr3o assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min z(x) &= c x \\ A x &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que $X = \{A x = b; x \geq 0\}$ 3 um conjunto convexo poliedral que representa as restrições do problema de programação linear original.

Nesse contexto, vamos encontrar um problema de programação linear totalmente equivalente ao problema anterior, mas com a particularidade de que esse novo problema equivalente seja resolvido de forma totalmente trivial. Para encontrar esse problema de programação linear equivalente, que chamamos de PL equivalente No. 1, usamos o Teorema Geral da Representação (TGR).

Supor que o problema de programação linear (3.1) tem k pontos extremos dados por $x_1, x_2, \dots, x_k$ e l direções extremas dadas por $d_1, d_2, \dots, d_l$.

De acordo com o TGR se $x \in X$, ent3o o ponto x pode ser representado por uma combinaç3o convexa dos pontos extremos de X mais uma combinaç3o linear n3o negativa das direções extremas de X . Portanto, para um $x \in X$ temos o seguinte:

$$x \in X \implies \begin{cases} x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^l \mu_j d_j \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, k \\ \mu_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, l \end{cases} \quad (3.2)$$

Portanto, o problema de programação linear original mostrado em (3.1) pode ser transformado em outro problema de programação linear equivalente que, adicionalmente, 3 muito mais simples de resolver do ponto de vista conceitual. Esse novo problema 3 representado apenas em funç3o das vari3veis λ_j e μ_j . Assim, apenas precisamos substituir o $x \in X$ de (3.2) na funç3o objetivo de (3.1) para encontrar o seguinte problema de programação linear equivalente:

$$\begin{aligned} \min z(x) &= c x \\ \text{s.a.} & \\ &\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \\ &\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, k \\ &\mu_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, l \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min z(\lambda, \mu) = \sum_{j=1}^k (c x_j) \lambda_j + \sum_{j=1}^l (c d_j) \mu_j \\ s.a. \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, k \\ \mu_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, l \end{array} \right. \quad (3.3)$$

que, neste livro, é chamado de problema de programação linear equivalente No. 1. Adicionalmente, deve-se observar que existe a seguinte relação muito importante:

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^l \mu_j d_j \quad (3.4)$$

Observações importantes: Em relação ao PL equivalente No. 1, as seguintes observações são muito relevantes:

1. Deve-se observar que os termos $(c x_j)$ e $(c d_j)$ são escalares que assumimos conhecidos (x_j é um ponto extremo e d_j é uma direção extrema de X) e, portanto, nesse novo PL as variáveis de decisão estão representadas pelas variáveis λ_j e μ_j .
2. O PL equivalente tem apenas uma restrição tradicional, isto é, $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ que na verdade é uma restrição muito simples. As outras são restrições simples de não negatividade. Assim, o novo PL tem apenas uma restrição e essa restrição é muito simples. Adicionalmente, esse número de restrições tradicionais não depende do tamanho do problema de programação linear original, isto é, do PL (3.1).
3. O número de variáveis do problema equivalente pode ser muito grande. Assim, o número de variáveis desse PL depende do número de pontos extremos e do número de direções extremas do PL original. Assim, para problemas de PL de tamanho razoável, o número de variáveis do novo PL pode ser muito grande.
4. O novo PL equivalente pode ter pouca utilidade prática já que, para montar esse PL, devemos encontrar todos os pontos extremos e todas as direções extremas do PL original, e sabemos que essa tarefa é muito demorada. Entretanto, esse PL equivalente tem uma utilidade teórica muito grande já que permite provar de forma trivial dois teoremas importantes da teoria de resolução de problemas de programação linear.
5. Finalmente, reiteramos que o problema de PL original e o problema de PL equivalente No. 1 são totalmente equivalentes e, portanto, possuem a mesma solução ótima.

Exemplo 3.1: Encontrar o PL equivalente No. 1 do seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned}
\min z(x) &= x_1 - 3x_2 \\
s.a. \quad & -x_1 + x_2 \leq 2 \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Os pontos extremos e as direções extremas do PL anterior podem ser encontrados usando a mesma estratégia usada nos exemplos 2.12 e 2.16 do capítulo anterior. Também, já que o problema original está no espaço E^2 , essas informações podem ser obtidas de forma gráfica usando o diagrama da Figura 3.1.

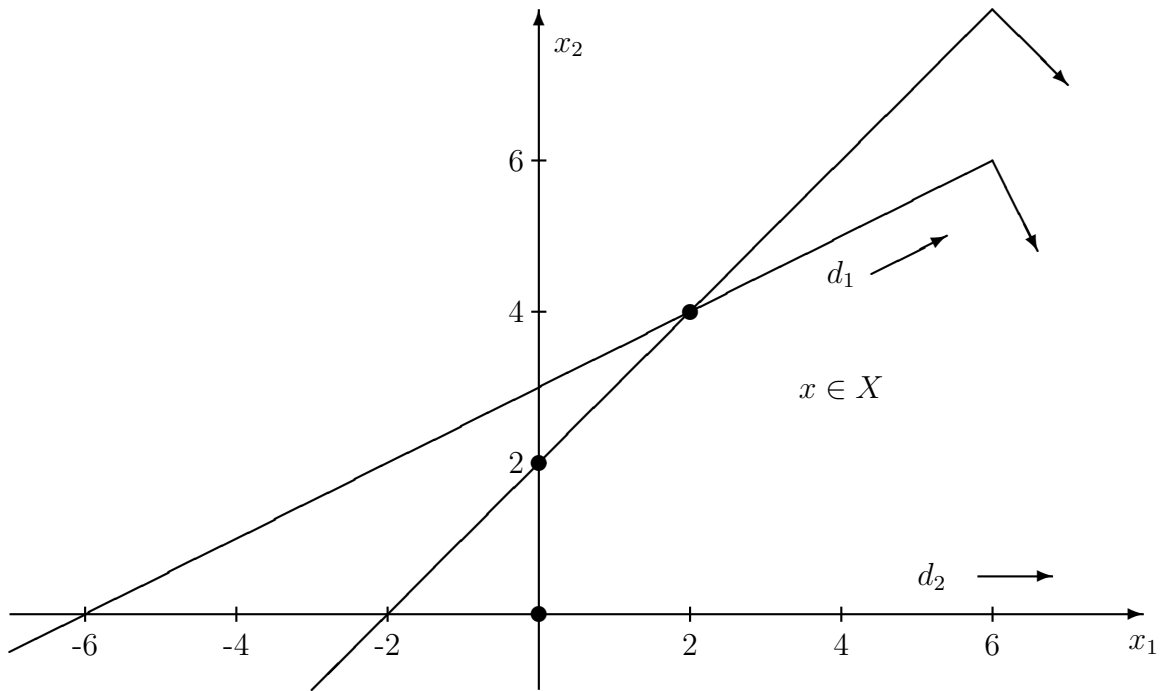


Figura 3.1: Pontos extremos e direções extremas do problema do Exemplo 3.1.

Portanto, os pontos extremos e as direções extremas do PL original são os seguintes:

$$\text{Pontos extremos} \implies x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Direções extremas} \implies d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, qualquer ponto x factível do problema original pode ser representado da seguinte forma:

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \lambda_2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \lambda_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mu_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mu_2$$

Para montar o PL equivalente, precisamos encontrar os coeficientes das variáveis λ_j e μ_j e procedemos da seguinte forma:

$$cx_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad cx_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -6 \quad cx_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -10$$

$$cd_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad cd_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -1$$

Com os escalares encontrados podemos montar o PL equivalente que assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min z(\lambda, \mu) &= 0 \lambda_1 - 6 \lambda_2 - 10 \lambda_3 + \mu_1 - \mu_2 \\ \text{s.a.} \quad &\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ &\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Pode-se observar que para resolver o PL equivalente não são necessários conhecimentos sofisticados de otimização, apenas bom senso. Devemos observar que todas as variáveis de decisão devem ser não negativas, que a soma das variáveis tipo λ_j deve ser igual a 1 e que pretendemos encontrar o menor valor possível para a função objetivo $z(\lambda, \mu)$. Assim, usando apenas o bom senso fixamos, por exemplo, $\mu_1 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$ (na verdade estamos escolhendo qualquer combinação de variáveis tipo λ_j cuja soma seja igual a 1) e $\mu_2 \rightarrow \infty$. Essa combinação faz com que $z(\lambda, \mu) \rightarrow -\infty$. Portanto, o problema é ilimitado, isto é, o problema não tem solução ótima finita. Finalmente, podemos observar de forma trivial que se uma variável tipo μ_j tiver coeficiente negativo, então o problema de programação linear é ilimitado. Usaremos essa propriedade para provar as condições nas quais um problema de programação linear é ilimitado.

Exemplo 3.2: Encontrar o PL equivalente No. 1 do seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min z(x) &= 4x_1 - x_2 \\ \text{s.a.} \quad &-x_1 + x_2 \leq 2 \\ &-x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ &x_1 \geq 0 \\ &x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Os pontos extremos e as direções extremas do PL são os mesmos do Exemplo 3.1. Assim, qualquer ponto x factível do problema original pode ser representado da seguinte forma:

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \lambda_2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \lambda_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mu_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mu_2 \quad (3.5)$$

Para montar o PL equivalente precisamos encontrar os coeficientes das variáveis λ_j e μ_j e procedemos da seguinte forma:

$$cx_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad cx_2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \quad cx_3 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 4$$

$$cd_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 \quad cd_2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 7$$

Com os escalares encontrados podemos montar o PL equivalente que assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min z(\lambda, \mu) &= 0 \lambda_1 - 2 \lambda_2 + 4 \lambda_3 + 4\mu_1 + 7\mu_2 \\ \text{s.a.} \quad &\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ &\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{aligned}$$

O PL equivalente mostrado acima também pode ser resolvido de forma trivial. Assim, usando apenas o bom senso fixamos, por exemplo, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ (fixando essas variáveis no menor valor possível já que um valor diferente apenas aumentaria o valor de $z(\lambda, \mu)$). Em relação às variáveis tipo λ_j , alocar o máximo valor possível para aquela variável que tem o menor coeficiente. Portanto, trivialmente, escolhemos $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ para encontrar o menor valor possível de $z(\lambda, \mu)$. Assim, a solução ótima do problema equivalente assume a seguinte forma:

$$\mu_1 = \mu_2 = \lambda_1 = \lambda_3 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \implies z(\lambda, \mu) = -2$$

Substituindo a solução anterior em (3.4) encontramos o seguinte:

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (0) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} (1) + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} (0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (0) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} (0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = x_2$$

que mostra que a solução ótima é o ponto extremo x_2 . Finalmente substituindo o valor de $x_2 = (0, 2)$ na função objetivo original encontramos o seguinte:

$$z(x) = 4(0) - 1(2) = -2 \implies z(x) = -2$$

que mostra que $z(x) = z(\lambda, \mu) = -2$ como era esperado já que ambos problemas são equivalentes. Usaremos essa propriedade para provar que se um problema de programação linear tem solução ótima finita, então um ponto extremo é ótimo do problema de programação linear (o ponto extremo x_2 no Exemplo 3.2).

3.2.2. A Prova de que um Problema de Programação Linear é Ilimitado

Teorema 3.1: Mostra as condições em que existe solução ótima finita para um problema de programação linear.

Se a região factível de um problema de programação linear é não vazia, então existe solução ótima finita para esse problema de programação linear $\iff c d_j \geq 0$ para $j = 1, 2, \dots, l$ e onde $d_1, d_2, \dots, d_l$ são as direções extremas da região factível do problema de programação linear. Em caso contrário, isto é, se existe um $c d_j < 0$, então o problema de programação linear é ilimitado.

Prova: O Teorema 3.1 pode ser provado de forma trivial analisando o Problema Equivalente No. 1 apresentado em (3.3). Assim, se existe solução ótima finita para o PL mostrado em (3.3), então cada coeficiente $c d_j$ de cada μ_j deve ser tal que $c d_j \geq 0$ já que em outro caso não existe garantia de ótimo finito para o PL. Por outro lado, se todos os coeficientes $c d_j \geq 0$, então o ótimo do PL tem que ser finito porque, nesse caso, fazemos trivialmente todos os $\mu_j = 0$ e a outra parcela da função objetivo é finita porque cada λ_j é finito (observemos que $0 \leq \lambda_j \leq 1$). Finalmente, observemos que se apenas um $c d_j < 0$, então o problema de PL é ilimitado já que, nesse caso, fazemos trivialmente todos os outros $\mu_j = 0$ e apenas o μ_j relacionado com o coeficiente $c d_j < 0$ deve assumir um valor de $\mu \rightarrow \infty$ tornando a função objetivo $z(\lambda, \mu) \rightarrow -\infty$ e assim o problema é ilimitado (nesse contexto os valores dos λ_j podem assumir qualquer valor no intervalo $0 \leq \lambda_j \leq 1$).

Portanto, para que exista um ótimo finito de um PL precisamos que todos os coeficientes $c d_j \geq 0$ onde d_j é uma direção extrema do conjunto convexo X (veja os Exemplos 3.1 e 3.2).

3.2.3. A Prova de que um Problema de Programação Linear tem Ótimo Finito

Teorema 3.2: Mostra que a solução ótima finita para um problema de programação linear é um ponto extremo.

Se existe solução ótima finita para um problema de programação linear $\implies$ um ponto extremo é solução ótima do problema de programação linear.

Prova: O Teorema 3.2 também pode ser provado de forma trivial analisando o Problema Equivalente No. 1 apresentado em (3.3). Assim, se existe solução ótima finita, então já sabemos que todos os $c d_j \geq 0$. Nesse contexto, para encontrar de forma trivial a solução ótima do problema de PL mostrado em (3.3), fixamos todos os μ_j no menor valor possível, isto é, $\mu_j = 0$; $\forall j = 1, 2, \dots, l$ para que a segunda parcela da função objetivo seja igual a zero (o menor valor possível). Agora supor que o índice k identifica a variável λ_k que tem o menor coeficiente ($c x_k$). Nesse contexto, também de forma trivial, o ótimo do PL é encontrado fixando $\lambda_k = 1$ e todos os outros $\lambda_j = 0$ já que essa estratégia produz o menor valor possível para $z(\lambda, \mu)$. Assim, de forma trivial foi encontrada a solução ótima do problema (3.3), que usando (3.4) assume a seguinte forma:

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^l \mu_j d_j = x_k \quad (3.6)$$

que mostra que o ponto extremo x_k é solução ótima do PL mostrado em (3.3).

Finalmente, deve-se observar que o Teorema 3.2 prova que um ponto extremo deve ser ótimo do PL mostrado em (3.3). Portanto, isso não descarta a possibilidade de que algum ponto não extremo também seja ótimo do PL mostrado em (3.3). Assim, por exemplo, se um problema de PL com a forma apresentada em (3.3) tiver três variáveis λ_j com os menores coeficientes e iguais em valor, então qualquer um deles pode assumir o valor $\lambda_j = 1$ o que prova que existem três soluções ótimas alternativas que são pontos extremos. Entretanto, todos os pontos factíveis obtidos como uma combinação convexa desses pontos extremos também são soluções ótimas do PL e esses pontos não são pontos extremos.

Exemplo 3.3: Encontrar o PL equivalente No. 1 do seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min z(x) &= x_1 - x_2 \\ \text{s.a.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Os pontos extremos e as direções extremas do PL são os mesmos do Exemplo 3.1. Assim, qualquer ponto x factível do problema original pode ser representado da seguinte forma:

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \lambda_2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \lambda_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mu_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mu_2 \quad (3.7)$$

Para montar o PL equivalente precisamos encontrar os coeficientes das variáveis λ_j e μ_j e procedemos da seguinte forma:

$$cx_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad cx_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \quad cx_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -2$$

$$cd_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad cd_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Com os escalares encontrados podemos montar o PL equivalente que assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min z(\lambda, \mu) &= 0 \lambda_1 - 2 \lambda_2 - 2 \lambda_3 + \mu_1 + \mu_2 \\ \text{s.a.} \quad & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{aligned}$$

O PL equivalente mostrado acima pode ser resolvido de forma trivial. Assim, escolhemos $\mu_1 = \mu_2 = 0$ (fixando essas variáveis no menor valor possível já que um valor diferente apenas

aumentaria o valor de $z(\lambda, \mu)$). Em relação às variáveis tipo λ_j , alocar o máximo valor possível para $\lambda_2 = 1$ ou para $\lambda_3 = 1$. Portanto, trivialmente, verificamos que os pontos extremos x_2 e x_3 são pontos extremos ótimos. Adicionalmente, levando em conta (3.7), qualquer ponto que cumpre com a seguinte relação:

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \lambda_2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \lambda_3 \quad \text{com} \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 1; \quad \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \implies$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \lambda_2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} (1 - \lambda_2) \quad \text{com} \quad \lambda_2 \geq 0$$

também é solução ótima do problema, isto é, qualquer ponto no segmento de reta que une x_2 e x_3 também é ótimo do problema de PL. A solução ótima é a seguinte

$$z(\lambda, \mu) = z(x) = -2 \implies z(x) = -2$$

Exemplo 3.4: Encontrar e resolver o PL equivalente No. 1 do seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min z(x) &= x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.} & \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Os pontos extremos e as direções extremas do PL são os mesmos do Exemplo 3.1. Assim, qualquer ponto x factível do problema original pode ser representado da seguinte forma:

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \lambda_2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \lambda_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mu_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mu_2 \quad (3.8)$$

Para montar o PL equivalente, precisamos encontrar os coeficientes das variáveis λ_j e μ_j e procedemos da seguinte forma:

$$cx_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad cx_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -4 \quad cx_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -6$$

$$cd_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad cd_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Com os escalares encontrados podemos montar o PL equivalente que assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min z(\lambda, \mu) &= 0 \lambda_1 - 4 \lambda_2 - 6 \lambda_3 + \mu_1 + 0 \mu_2 \\ \text{s.a.} \quad & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{aligned}$$

O PL equivalente mostrado acima pode ser resolvido de forma trivial. Assim, escolhemos $\mu_1 = \mu_2 = 0$ (fixando essas variáveis no menor valor possível já que um valor diferente apenas aumentaria o valor de $z(\lambda, \mu)$). Em relação às variáveis tipo λ_j , alocar o máximo valor possível para $\lambda_3 = 1$. Portanto, trivialmente, verificamos que o ponto extremo x_3 é a solução ótima do PL. Entretanto, se $\mu_2 \neq 0$, a função objetivo não varia e continua sendo ótima. Assim, neste caso o ponto extremo x_3 é solução ótima do problema, mas também todo ponto do raio que tem como vértice o ponto extremo x_3 e como direção a direção extrema d_2 também é solução ótima do problema de PL. Portanto, estamos no caso em que existe um raio ótimo para o problema que, de acordo com (3.8), assume a seguinte forma:

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mu_2 \quad \text{com} \quad \mu_2 \geq 0$$

A solução ótima é a seguinte

$$z(\lambda, \mu) = z(x) = -6 \implies z(x) = -6$$

Observação importante: Deve-se observar novamente que não é prático montar o problema de programação linear equivalente No. 1 para resolver um problema de programação linear. O motivo fundamental é que a tarefa de encontrar os pontos extremos e as direções extremas é muito onerosa do ponto de vista de processamento. Assim, o problema de programação linear equivalente No. 1 é montado apenas para provar os Teoremas 3.1 e 3.2. Após aceitar as consequências dos Teoremas 3.1 e 3.2, isto é, após concordar que o ponto extremo de um problema de PL é ótimo desse PL, então devemos implementar uma estratégia eficiente que permita procurar a solução ótima analisando apenas pontos extremos. Esse método sistemático é chamado de método primal simplex, que é apresentado adiante.

3.2.4. Padronização de um Problema de Programação Linear

Para que seja possível uma análise algébrica adequada, um problema de programação linear deve estar na chamada forma padronizada. Assim, um problema de programação linear se encontra na forma padronizada se assume a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \min z(x) &= c x \\ \text{s.a.} \quad & A x = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

A estrutura das restrições na forma $Ax = b$ e $x \geq 0$ é obrigatória em toda forma padronizada. Entretanto, a forma de escolha de minimização na função objetivo é opcional (pode também assumir a forma $Max\ z(x)$), mas é a alternativa escolhida neste livro.

Portanto, se um problema de programação linear não se encontra na forma padronizada e se pretendemos resolver esse problema usando o método primal simplex, então deve-se proceder com a padronização. Para padronizar um problema de programação linear procedemos da seguinte forma:

- Se a função objetivo se encontra na forma de $Max\ f(x)$, então procedemos a transformar para a forma de minimização da seguinte forma: $Max\ f(x) \iff Min\ -f(x) = Min\ z(x)$.
- Uma restrição na forma $a^i x \leq b_i$ é transformada na forma de igualdade usando uma variável de folga não negativa x_{n+i} na seguinte forma:

$$a^i x \leq b_i \implies a^i x + x_{n+i} = b_i; \quad x_{n+i} \geq 0$$

- Uma restrição na forma $a^i x \geq b_i$ é transformada na forma de igualdade usando uma variável de excesso não negativa x_{n+i} na seguinte forma:

$$a^i x \geq b_i \implies a^i x - x_{n+i} = b_i; \quad x_{n+i} \geq 0$$

- Uma variável irrestrita é substituída por duas variáveis não negativas da seguinte forma:

$$x_j \text{ irrestrita} \implies x_j = x_j^+ - x_j^-; \quad x_j^+ \geq 0; \quad x_j^- \geq 0$$

Exemplo 3.5: Encontrar a forma padronizada do seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \max f(x) &= -2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ & -x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & x_1 \text{ irrestrito} \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

O PL anterior é transformado na forma padronizada da seguinte forma:

- A função objetivo de minimização assume a seguinte forma: $\min z(x) = 2x_1 - x_2$.
- A restrição $2x_1 + x_2 \leq 12$ é substituída pela forma: $2x_1 + x_2 + x_3 = 12; \quad x_3 \geq 0$.
- A restrição $-x_1 + 2x_2 \geq 6$ é substituída pela forma: $-x_1 + 2x_2 - x_4 = 6; \quad x_4 \geq 0$.
- A variável x_1 irrestrita é substituída pela forma: $x_1 = x_1^+ - x_1^-$.

Portanto, o problema de programação linear na forma padronizada assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\min z(x) &= 2x_1^+ - 2x_1^- - x_2 \\
s.a. & \\
&2x_1^+ - 2x_1^- + x_2 + x_3 = 12 \\
&-x_1^+ + x_1^- + 2x_2 - x_4 = 6 \\
&x_1^+ \geq 0 \\
&x_1^- \geq 0 \\
&x_2 \geq 0 \\
&x_3 \geq 0 \\
&x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

3.2.5. Outras Aplicações do Teorema Geral da Representação: A Decomposição de Dantzig-Wolfe

Anteriormente foi usado o Teorema Geral da Representação para encontrar o Problema de Programação Linear Equivalente No. 1. Entretanto, o TGR pode ser usado para gerar uma grande família de problemas de programação linear equivalentes ao problema de programação linear original. Outra grande aplicação do TGR é a formulação de um problema de programação linear equivalente que permite a aplicação da técnica de decomposição matemática de Dantzig-Wolfe.

3.3. Solução Básica Factível e seu Equivalente com o Ponto Extremo

Nesta Seção é analisada a propriedade fundamental que relaciona os pontos extremos com as chamadas soluções básicas factíveis. Essa relação é fundamental para entender de forma adequada as principais propriedades relacionadas com a resolução de problemas de programação linear.

3.3.1. Definição de Solução Básica Factível

Seja o seguinte conjunto convexo:

$$X = \{x : Ax = b; \quad x \geq 0\} \quad (3.9)$$

onde a matriz A é de dimensão $m \times n$, o vetor b é de dimensão m e $\text{Posto}[A, b] = \text{Posto}[A] = m$ com $m < n$.

No sistema (3.9) sempre é possível montar o seguinte arranjo:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix}$$

onde a matriz quadrada $B_{m \times m}$ é chamada de matriz básica e tem inversa. A matriz $N_{m \times (n-m)}$ é chamada de matriz não básica. Nesse contexto, pode-se realizar as seguintes transformações:

$$\begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \implies B x_B + N x_N = b \implies$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N \quad (3.10)$$

Assim, para o sistema mostrado em (3.10), define-se os seguintes conceitos fundamentais:

- Uma **solução básica (SB)** para o sistema (3.10) (e portanto para o sistema (3.9)) é aquela encontrada fazendo $x_N = 0$ em (3.10) e resolvendo o sistema restante para encontrar a seguinte solução:

$$x_B = B^{-1}b \quad x_N = 0$$

- Uma **solução básica factível (SBF)** para o sistema (3.10) (e portanto para o sistema (3.9)) é aquela encontrada fazendo $x_N = 0$ em (3.10) e se após resolver o sistema restante encontramos a seguinte solução:

$$x_B = B^{-1}b \geq 0 \quad x_N = 0$$

Observação importante: Nas definições mostradas anteriormente, deve-se observar que toda SBF é também SB mas nem toda SB é SBF. Deve-se observar que uma SB é obrigada a cumprir apenas a relação $A x = b$ enquanto que uma SBF deve cumprir as restrições $A x = b$ e $x \geq 0$ e, portanto, é factível para X , isto é, $x = (x_B, x_N)$ pertence a X . Adicionalmente, deve-se observar que uma SB não necessariamente pertence a X . Nesse contexto, B é chamada de matriz básica, N é chamada de matriz não básica, x_B é o vetor de variáveis básicas e x_N é o vetor de variáveis não básicas.

3.3.2. Estratégia Para Encontrar as Soluções Básicas Factíveis

No Capítulo anterior foi apresentada uma estratégia para encontrar os pontos extremos de um conjunto convexo poliedral. Assim, também existe uma estratégia para encontrar as soluções básicas factíveis de um conjunto convexo apresentado na forma do sistema (3.9). Adicionalmente, deve-se observar que a SBF foi definida para um conjunto convexo do sistema (3.9) (com as restrições $A x = b$) enquanto os pontos extremos foram definidos em um contexto muito mais geral (podem aparecer restrições de igualdade e desigualdade e as restrições triviais podem ou não estar presentes). Portanto, para encontrar os pontos extremos do conjunto convexo apresentado em (3.9), pode-se implementar a seguinte estratégia:

1. O número máximo de candidatos a SBF é encontrado usando a seguinte relação:

$$N_{max} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)! m!}$$

2. Para cada candidato a SBF fazer o seguinte:

- a) Montar a matriz B formada por m colunas da matriz A .
- b) Resolver o sistema $B x_B = b$, isto é, resolver um sistema de m equações com m incógnitas. Esse processo de resolução pode levar a três tipos de solução.
 - Se a matriz B não tem inversa então a proposta candidata a SBF não representa uma SBF (estamos pretendendo resolver um sistema que não tem solução).
 - Se a matriz B tem inversa e a solução encontrada $x_B \geq 0$, então foi encontrada uma SBF.
 - Se a matriz B tem inversa e a solução encontrada x_B apresenta algum elemento negativo, então foi encontrada apenas uma SB, mas essa proposta não representa uma SBF.

Observação importante: Usar a estratégia anterior pode ser muito demorado já que para analisar cada candidato a SBF, deve-se resolver um sistema algébrico linear de m equações com m incógnitas. Assim, essa estratégia é usada apenas em caráter ilustrativo e para problemas com um número reduzido de variáveis como também acontece quando se pretende encontrar os pontos extremos de um conjunto convexo.

Exemplo 3.6: Encontrar as soluções básicas factíveis do seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min z(x) &= c x \\ \text{s.a.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Deve-se observar que apenas precisamos conhecer os dados das restrições. Inicialmente, deve-se transformar as restrições de desigualdade em restrições de igualdade usando variáveis de folga (essa transformação é obrigatória quando se pretenda encontrar as SBFs do problema e não era obrigatória quando se pretende encontrar os pontos extremos). Assim, o conjunto convexo formado pelas restrições do problema de programação linear assume a seguinte forma:

$$x \in X \implies \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Assim, a parcela correspondente ao sistema $A x = b$ para o problema assume a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Posto}[A, b] = \text{Posto}[A] = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz A tem 4 colunas e com duas dessas colunas pode ser montada uma matriz B . Encontramos as SBFs do problema usando o algoritmo apresentado anteriormente.

1. O número de candidatos a SBF é o seguinte:

$$N_{max} = \frac{4!}{2! 2!} = 6$$

2. Avaliamos cada um dos 6 candidatos a SBF.

- As colunas de x_1 e x_2 formam a matriz B :

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Assim, como todas as variáveis básicas são não negativas ($x_1 = 2$ e $x_2 = 4$), então B identifica uma SBF com $x_B = (x_1, x_2) = (2, 4)$ e $x_N = (x_3, x_4) = (0, 0)$.

- As colunas de x_1 e x_3 formam a matriz B :

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Assim, como as duas variáveis básicas são negativas ($x_1 = -6$ e $x_3 = -4$), então B não representa uma SBF.

- As colunas de x_1 e x_4 formam a matriz B :

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Assim, como a variável básica x_1 é negativa ($x_1 = -2$), então B não representa uma SBF.

- As colunas de x_2 e x_3 formam a matriz B :

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Assim, como a variável básica x_3 é negativa ($x_3 = -1$), então B não representa uma SBF.

- As colunas de x_2 e x_4 formam a matriz B :

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Assim, como todas as variáveis básicas são não negativas ($x_2 = 2$ e $x_4 = 2$), então B identifica uma SBF com $x_B = (x_2, x_4) = (2, 2)$ e $x_N = (x_1, x_3) = (0, 0)$.

- As colunas de x_3 e x_4 formam a matriz B :

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Assim, como todas as variáveis básicas são não negativas ($x_3 = 2$ e $x_4 = 6$), então B identifica uma SBF com $x_B = (x_3, x_4) = (2, 6)$ e $x_N = (x_1, x_2) = (0, 0)$.

Portanto, o conjunto convexo do Exemplo 3.6 apresenta 3 soluções básicas factíveis, isto é, os pontos $(2, 4, 0, 0)$, $(0, 2, 0, 2)$ e $(0, 0, 2, 6)$. Esses pontos, projetados no espaço E^2 representam os seguintes pontos: $(x_1, x_2) = (2, 4)$, $(x_1, x_2) = (0, 2)$ e $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Veja na Figura 3.1 que esses pontos representam os pontos extremos do problema do Exemplo 3.6. Assim, as SBFs do problema do Exemplo 3.6 também são pontos extremos do problema do Exemplo 3.6. Esse fato não é uma coincidência e na verdade representa uma das características mais importantes relacionadas com a resolução de problemas de programação linear.

3.3.3. Teorema Fundamental que Relaciona Pontos Extremos e Soluções Básicas Factíveis

Teorema 3.3: Teorema que relaciona um ponto extremo com uma solução básica factível.

Um ponto $x \in X$ no sistema (3.9) representa uma SBF $\iff x$ é um ponto extremo.

Prova: A prova é realizada no contexto do seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \text{Min } z(x) &= c x \\ \text{s.a.} \quad & A x = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

em que $\text{Posto}[A] = \text{Posto}[A, b] = m$ e $X = \{x : A x = b; x \geq 0\}$.

$\implies$ Se x é um ponto extremo de X então x é uma SBF de X :

Se $x \in X$ é um ponto extremo de X , então em x existem n hiperplanos ativos linearmente independentes (LI). Deve-se observar que em $A x = b$ sempre existem m hiperplanos ativos LI e, portanto, em x devem existir $p = (n - m)$ hiperplanos ativos do conjunto de n subespaços representados em $x \geq 0$. Agrupemos esses p hiperplanos na forma $x_N = 0$. Portanto, o sistema algébrico $A x = b; x_N = 0$ formado por n equações e n incógnitas deve ter solução única (veja que está representado pela interseção de n hiperplanos ativos linearmente independentes). Agora, seja N a submatriz de A das colunas das variáveis em x_N e B a submatriz restante de A representando as colunas das outras variáveis agrupadas em x_B . Como $A x = b$ pode ser escrito na forma $B x_B + N x_N = b$ e com $x_N = 0$, então B tem inversa porque o sistema tem solução única e, portanto, temos que $x_B = B^{-1}b \geq 0$ já que $x \in X$ e, portanto, $x \geq 0$. Finalmente, como $x_B = B^{-1}b \geq 0$ e $x_N = 0$, então $x = (x_B, x_N)$ é uma SBF de X .

$\impliedby$ Se x é uma SBF de X então x é um ponto extremo de X :

Pela definição de SBF sabemos que para um ponto x que representa uma SBF, $x = (x_B, x_N)$ com $A = [B \ N]$, então temos que $x_B = B^{-1}b \geq 0$ e $x_N = 0$. Entretanto para um x desse tipo existem n hiperplanos ativos na caracterização desse ponto, isto é, os m hiperplanos de $A x = b$ que sempre se encontram ativos e os $(n - m)$ hiperplanos ativos relacionados com $x_N = 0$ e desde que exista B^{-1} o que garante que os hiperplanos são linearmente independentes. Portanto, se n hiperplanos LI se encontram ativos em x , então x é um ponto extremo.

Observações importantes: Em relação ao ponto extremo e SBF, as seguintes observações são muito importantes:

1. A cada ponto extremo está associada uma SBF e vice-versa.
2. Podem existir várias submatrizes B representando uma base de uma SBF. Neste caso existe uma SBF degenerada em que existem mais de n hiperplanos ativos no espaço E^n no ponto x . O número adicional de hiperplanos ativos indica o grau de degeneração do ponto x . Alternativamente, o grau de degeneração de um ponto x pode ser quantificado pelo número de elementos iguais a zero em x_B .

3. Se existe mais de uma base representando uma SBF ou ponto extremo, então o ponto extremo é degenerado. Entretanto, o contrário nem sempre é verdadeiro, isto é, se um ponto extremo é degenerado, não necessariamente existe mais de uma base representando esse ponto extremo.

3.3.4. Solução Básica Factível Degenerada

Uma SBF é chamada de degenerada quando, dada uma base B , algum elemento de x_B é igual a zero. Alternativamente, pode-se dizer que um ponto extremo x é degenerado se nesse ponto existem mais de n hiperplanos ativos. Assim, o número de hiperplanos ativos adicionais ou o número de elementos com valores iguais a zero determina o grau de degeneração de um ponto extremo ou de uma SBF. Uma SBF degenerada pode produzir problemas na técnica de solução de um problema de programação linear porque podem existir várias submatrizes B identificando a mesma SBF.

Exemplo 3.7: Existência de SBF degenerada.

Encontre as SBFs do seguinte conjunto convexo poliedral:

$$x \in X \implies \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

A Figura 3.2 mostra a região factível desse problema.

Para encontrar as SBFs de X transformamos esse conjunto na forma de restrições de igualdade da seguinte forma:

$$x \in X \implies \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 & = 2 \\ -x_1 + 2x_2 & + x_4 & = 6 \\ & x_2 + & & x_5 & = 4 \\ x_1 & \geq 0 \\ x_2 & \geq 0 \\ x_3 & \geq 0 \\ x_4 & \geq 0 \\ x_5 & \geq 0 \end{cases}$$

Nesse contexto, a matriz A assume a seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, existem 10 candidatos a SBF (ver Exemplo 3.6). Neste caso vamos analisar apenas três desses candidatos, isto é, os candidatos relacionados com o ponto extremo P mostrado na Figura

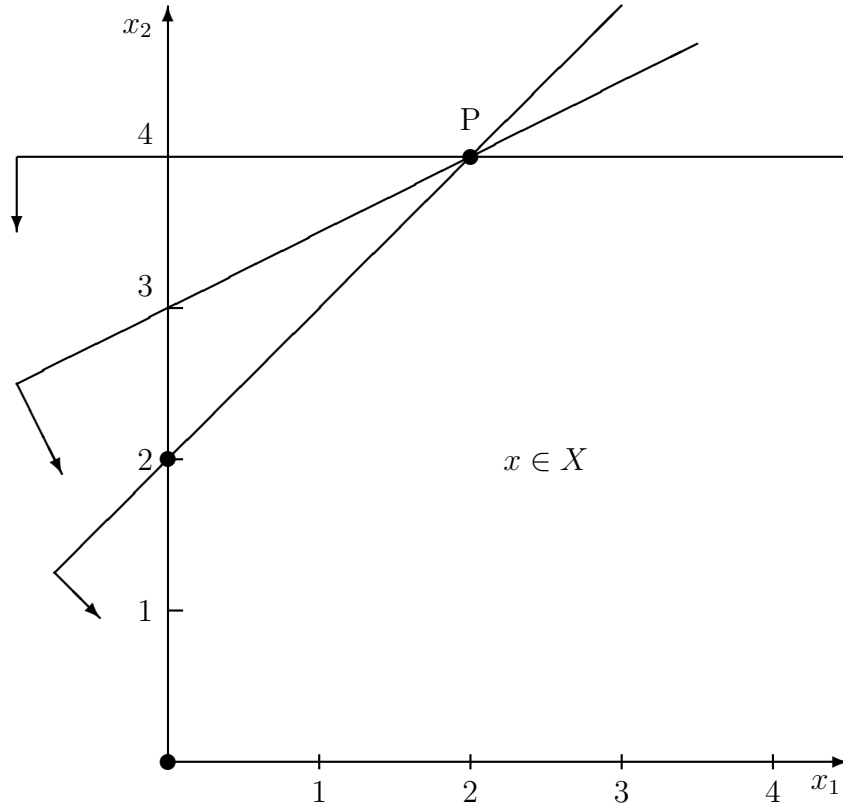


Figura 3.2: Existência de SBF degenerada.

3.2. Assim, vamos provar que esse ponto extremo (ou SBF) é representado por três submatrizes básicas diferentes. Assim, dos 10 candidatos a SBF analisamos apenas os três seguintes:

1. **Caso 1:** Submatriz B formada pelas colunas de x_1 , x_2 e x_3 :

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_N = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que representa o ponto $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 4, 0, 0, 0)$ ou no espaço E^2 representa a solução $(x_1, x_2) = (2, 4)$.

2. **Caso 2:** Submatriz B formada pelas colunas de x_1 , x_2 e x_4 :

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que representa o ponto $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 4, 0, 0, 0)$ ou no espaço E^2 representa a solução $(x_1, x_2) = (2, 4)$.

3. **Caso 3:** Submatriz B formada pelas colunas de x_1, x_2 e x_5 :

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que representa o ponto $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 4, 0, 0, 0)$ ou no espaço E^2 representa a solução $(x_1, x_2) = (2, 4)$

Portanto, foi mostrado que existem 3 submatrizes tipo B que representam o mesmo ponto extremo ou a mesma SBF, o que caracteriza um ponto extremo degenerado. O leitor está convidado a analisar os outros sete casos e verificar que existem duas SBFs adicionais como pode ser observado na Figura 3.2.

Exemplo 3.8: Existência de SBF degenerada representada por uma única base.

Encontre as SBFs do seguinte conjunto convexo poliedral:

$$x \in X \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Nesse contexto, a matriz A assume a seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, existem 3 candidatos a SBF (ver Exemplo 3.6). Esses casos são os seguintes:

1. **Caso 1:** Submatriz B formada pelas colunas de x_1 e x_2 :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_N = x_3 = 0$$

que representa o ponto $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 0)$. Esse ponto é um ponto extremo degenerado onde existem 4 hiperplanos ativos.

2. **Caso 2:** Submatriz B formada pelas colunas de x_1 e x_3 :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_N = x_2 = 0$$

que representa o ponto $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$. Esse ponto também é um ponto extremo degenerado, onde existem 4 hiperplanos ativos, diferente do encontrado no Caso 1.

3. **Caso 3:** Submatriz B formada pelas colunas de x_2 e x_3 :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{não tem inversa}$$

que indica que essa matriz não representa uma SBF.

Portanto, foi resolvido um curioso problema relacionado com um conjunto X em que existem apenas dois pontos extremos e ambos são degenerados. Adicionalmente, cada um desses pontos extremos é representável por apenas uma base.

3.3.5. Existência de SBF em um Conjunto Convexo Poliedral Padrão

A estrutura das restrições de um problema de programação linear na forma padronizada assume a seguinte forma:

$$X = \{x : Ax = b; \quad x \geq 0\} \quad (3.11)$$

Teorema 3.4: Se o conjunto X apresentado em (3.11) é não vazio, então existe pelo menos uma SBF e o número de SBFs é finito.

O Teorema 3.4 se prova de forma trivial usando os conceitos usados na prova do Teorema Geral da Representação. Na prova desse teorema, foi provado que o conjunto X tem pelo menos um ponto extremo se não for vazio e que o número de pontos extremos é finito. Como cada ponto extremo corresponde a uma SBF, então de forma trivial podemos concluir que existe pelo menos uma SBF e o número de SBFs deve ser finito.

Entretanto, não é uma boa alternativa tentar encontrar a solução ótima de um problema de programação linear avaliando cada uma de suas SBFs porque esse número geralmente é elevado e avaliar cada candidato a SBF é também computacionalmente oneroso.

Observações importantes: As seguintes observações são muito importantes:

1. Um ponto extremo (ou uma SBF) é uma solução ótima de um problema de programação linear se esse ótimo existe.
2. Os pontos extremos que relacionamos com uma visão geométrica do problema são equivalentes com as SBFs que correspondem a uma visão algébrica do problema.
3. As soluções básicas factíveis (SBFs) (ou os pontos extremos) são finitas e limitadas pela relação:

$$N_{max} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m! (n - m)!}$$

4. Não é uma boa ideia tentar encontrar a solução ótima de um problema enumerando os pontos extremos ou as SBFs porque o número de candidatos a SBF geralmente é muito elevado. Não é possível saber com antecedência se o problema de programação linear é ilimitado e também não é possível saber com antecedência se o conjunto convexo X , que representa as restrições de um problema de programação linear, é vazio. Por esse motivo foi inventado o método primal simplex para resolver de forma eficiente os problemas de programação linear.

3.4. A Capacidade de Verificar se uma Solução Básica Factível (Ponto Extremo) é uma Solução Ótima de um Problema de Programação Linear

A primeira estratégia do método primal simplex é provar que um ponto extremo é ótimo finito de um problema de programação linear, o que já foi provado anteriormente junto com a prova de que o número de pontos extremos é finito. Para essa primeira estratégia foi determinante a dedução do Problema de Programação Linear Equivalente No. 1, entre outras propriedades. A segunda estratégia fundamental do método primal simplex é provar que existe a capacidade de verificar se um ponto extremo que se encontra disponível é ótimo ou não é ótimo. Assim, analisando apenas um ponto extremo disponível (e, portanto, sem conhecer os outros pontos extremos) podemos provar se esse ponto extremo é ótimo ou não é ótimo. Nesta Seção tratamos dessa importante

propriedade e, para isso, encontraremos outro problema de programação linear equivalente, isto é, o Problema de Programação Linear Equivalente No. 2.

Consideremos o seguinte problema de programação linear apresentado na forma padronizada:

$$(PL) \Rightarrow \begin{cases} \min z(x) = & c x \\ s.a. & \\ & A x = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Na relação anterior, A é uma matriz de dimensão $m \times n$ e $Posto[A, b] = Posto[A] = m < n$. Adicionalmente, supor que existe disponível uma SBF identificada pela submatriz B de A . Seja $\bar{x}$ o ponto extremo relacionado com essa SBF. Nesse contexto separamos os vetores $\bar{x}$ e c da seguinte forma:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_B & c_N \end{bmatrix}$$

em que c_B é o vetor de coeficientes de custo das variáveis básicas e c_N é o vetor de coeficientes de custo das variáveis não básicas. Nesse ponto extremo, a função objetivo assume a seguinte forma:

$$z_o(x) = c \bar{x} = \begin{bmatrix} c_B & c_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = c_B B^{-1}b$$

Sabendo que $\bar{x}$ representa uma SBF, então usamos essa informação no sistema $A x = b$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A \bar{x} = b &\Rightarrow \begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \Rightarrow B x_B + N x_N = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N \\ x_B &= B^{-1}b - \sum_{j \in R} B^{-1}a_j x_j = B^{-1}b - \sum_{j \in R} y_j x_j \end{aligned} \quad (3.13)$$

Na relação anterior R é o conjunto de índices das variáveis não básicas, a_j é a coluna j da matriz A correspondente à variável não básica x_j e $y_j = B^{-1}a_j$. Deve-se observar que na relação anterior foi realizada apenas a seguinte transformação:

$$N x_N = \begin{bmatrix} a_{m+1} & a_{m+2} & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$N x_N = a_{m+1}x_{m+1} + a_{m+2}x_{m+2} + \dots + a_n x_n = \sum_{j \in R} a_j x_j$$

Agora implementamos a mesma transformação na função objetivo na seguinte forma:

$$z(x) = c x = \begin{bmatrix} c_B & c_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = c_B x_B + c_N x_N$$

Agora substituímos x_B de (3.13) na relação anterior e encontramos o seguinte:

$$\begin{aligned} z(x) &= c_B [B^{-1}b - \sum_{j \in R} B^{-1}a_j x_j] + c_N x_N \\ z(x) &= c_B B^{-1}b - \sum_{j \in R} c_B B^{-1}a_j x_j + \sum_{j \in R} c_j x_j = z_o(x) - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j \end{aligned} \quad (3.14)$$

em que $z_o(x) = c_B B^{-1}b$ e $z_j = c_B B^{-1}a_j$.

Deve-se observar que as relações (3.13) e (3.14) são apenas transformações realizadas no problema original mostrado em (3.12) usando apenas a informação de que temos disponível uma SBF identificada pela base B . Portanto, (3.13) e (3.14) representam um problema de programação linear equivalente ao problema de programação linear original apresentado em (3.12). Na verdade, representa apenas uma transformação. Portanto, usando as relações (3.13) e (3.14), montamos o chamado Problema de Programação Linear Equivalente No. 2 que assume a seguinte forma:

$$(PLE \text{ No. 2}) \Rightarrow \begin{cases} \min z(x) = z_o(x) - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j \\ s.a. \\ \sum_{j \in R} y_j x_j + x_B = B^{-1}b \\ x_j \geq 0 \quad \forall j \in R \\ x_B \geq 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

em que $z_o(x) = c_B B^{-1}b$, $z_j = c_B B^{-1}a_j$ e $y_j = B^{-1}a_j$ como já definido anteriormente.

Analisando o Problema de Programação Linear Equivalente No. 2 apresentado anteriormente, pode-se verificar de forma trivial se a base B , que representa uma SBF e que foi usada para montar esse problema equivalente, é uma SBF ótima ou não é uma SBF ótima.

Observações importantes: Relacionado com o PL equivalente No. 2 é oportuno realizar as seguintes observações:

1. O PL equivalente No. 2 obviamente é totalmente equivalente ao PL original, isto é, um x que é factível para o problema original também é factível para o problema equivalente.
2. No PL equivalente No. 2, o vetor de variáveis básicas assume a seguinte forma:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_i} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix}$$

Assim, existe apenas uma variável básica x_{B_i} em cada restrição do PL equivalente. Essa característica é muito importante.

3. O PL equivalente No. 2 foi montado assumindo uma SBF conhecida e representada pela base B . Assim, veja que se no PL equivalente fazemos $x_j = 0 \forall j \in R$, então encontramos a solução correspondente ao ponto extremo como era esperado, isto é, $x_B = B^{-1}b$, $z(x) = z_o(x) = c_B B^{-1}b$ e $x_N = 0$. Portanto, $x_j = 0 \forall j \in R$ no problema equivalente significa que estamos no ponto extremo em análise e definido pela base B . Nesse contexto, se mudamos alguns valores das variáveis x_j para assumir valores positivos e preservando a não negatividade das variáveis básicas, então encontramos um ponto vizinho ao ponto extremo e factível. Em geral, qualquer mudança nos elementos x_j nos permite passar do ponto extremo corrente para qualquer outro ponto em que o sistema $Ax = b$ é satisfeito.
4. No contexto em análise a questão mais importante é saber o que acontece se todos os coeficientes da função objetivo do PL equivalente são não positivos, isto é, se $(z_j - c_j) \leq 0 \forall j \in R$. Assim, verificamos trivialmente que nesse caso qualquer mudança no valor corrente das variáveis não básicas x_j , que possuem valores $x_j = 0$ no ponto extremo corrente, produziria um aumento do valor da função objetivo. Portanto, como qualquer mudança em x_j produz uma deterioração do valor da função objetivo, então de forma trivial concluímos que a SBF representada pela base B é ótima. Assim, foi encontrada a conclusão mais importante desta Seção.

A partir das observações importantes concluímos que se no PL equivalente é verdadeira a relação:

$$\bar{c}_j = z_j - c_j = c_B B^{-1}a_j - c_j \leq 0 \quad \forall j \in R$$

então a SBF representada pela base B é ótima. Reiteramos que para chegar a essa conclusão não precisamos conhecer os outros pontos extremos (SBFs), isto é, apenas precisamos ter disponível a informação de uma SBF. Em resumo, o PL equivalente No. 2 nos permite encontrar as seguintes conclusões:

1. Se $\bar{c}_j = z_j - c_j = c_B B^{-1}a_j - c_j \leq 0 \quad \forall j \in R$, então a SBF representada pela base B é SBF ótima do problema de programação linear.
2. Se a relação anterior não for verdadeira, então podemos modificar o valor corrente de uma variável não básica $x_k = 0$ que possua um $\bar{c}_k = z_k - c_k > 0$ para assumir valores positivos e que nos permita encontrar outro ponto de melhor qualidade na busca da solução ótima.

Exemplo 3.9: Verificando se uma SBF é ótima ou não é ótima.

Seja o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned}
\min z(x) &= 4x_1 - x_2 \\
&\quad -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&\quad -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\
&\quad x_1 \geq 0 \\
&\quad x_2 \geq 0 \\
&\quad x_3 \geq 0 \\
&\quad x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Nesse problema de PL, a matriz base formada pelas colunas de x_1 e x_2 identifica uma SBF (o ponto extremo $(2, 4, 0, 0)$) e a matriz base formada pelas colunas de x_2 e x_4 identifica outra SBF (o ponto extremo $(0, 2, 0, 2)$). Verifique se esses pontos extremos (SBFs) são ótimos.

Antes de resolver o problema, observemos que o problema de PL apresentado é o mesmo do Exemplo 3.2 e cujo conjunto convexo formado pelas restrições está originalmente no espaço E^2 . Assim, em relação à formulação inicial, foram adicionadas as variáveis de folga x_3 e x_4 . Para resolver o problema, analisamos cada ponto extremo de forma independente. Para análise, a matriz A assume a seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

1. Analisando o ponto extremo $(2, 4, 0, 0)$:

As variáveis básicas são x_1 e x_2 que assumem geralmente valores positivos. Assim temos o seguinte:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad c_B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \quad c_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \implies B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix}$$

Com as grandezas encontradas anteriormente encontramos os parâmetros do PLE No. 2, tais como os coeficientes de custo relativo das variáveis não básicas $\bar{c}_j = z_j - c_j \forall j \in R$, a função objetivo $z_o(x)$ e os vetores $y_j \forall j \in R$ em que $R = \{3, 4\}$. Assim temos os seguintes:

$$\bar{c}_3 = c_B B^{-1} a_3 - c_3 = \begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -7$$

$$\bar{c}_4 = c_B B^{-1} a_4 - c_4 = \begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 3$$

Como $\bar{c}_4 = 3 > 0$, então já podemos concluir que o ponto extremo analisado não é ótimo. Entretanto encontramos os outros parâmetros para montar o PLE No. 2:

$$y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad y_4 = B^{-1}a_4 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z_o(x) = c_B B^{-1}b = \begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = 4$$

Portanto, o PLE No. 2 assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min z(x) &= 4 + 7x_3 - 3x_4 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 &= 2 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

No PLE No. 2 podemos verificar trivialmente que o ponto extremo em análise não é ótimo já que se x_4 aumenta de valor, a partir do valor corrente igual a zero, então a função objetivo diminui.

2. Analisando o ponto extremo $(0, 2, 0, 2)$:

As variáveis básicas são x_2 e x_4 . Assim temos o seguinte:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad c_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \quad c_N = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \implies B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com as grandezas encontradas anteriormente encontramos os parâmetros do novo PLE No. 2. Assim temos os seguintes:

$$\bar{c}_1 = c_B B^{-1}a_1 - c_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - 4 = 1 - 4 = -3$$

$$\bar{c}_3 = c_B B^{-1}a_3 - c_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -1$$

Como $\bar{c}_1 = -3 \leq 0$ e $\bar{c}_3 = -1 \leq 0$, então já podemos concluir que o ponto extremo analisado é ótimo. Entretanto encontramos os outros parâmetros para montar o novo PLE No. 2:

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$z_o(x) = c_B B^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = -2$$

Portanto, o PLE No. 2 assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad z(x) &= -2 + 3x_1 + x_3 \\ &\quad -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ &\quad x_1 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ &\quad x_1 \geq 0 \\ &\quad x_2 \geq 0 \\ &\quad x_3 \geq 0 \\ &\quad x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

No novo PLE No. 2 podemos verificar trivialmente que o ponto extremo em análise é ótimo já que se x_1 ou x_3 aumentam de valor, a partir do valor corrente igual a zero, então a função objetivo aumenta.

O método primal simplex verifica se um ponto extremo que se encontra disponível é ótimo ou não é ótimo. Se o ponto extremo não for ótimo, então o método encontra uma estratégia para identificar um ponto extremo adjacente e de melhor qualidade do ponto extremo corrente que foi analisado. Esse mecanismo de transição é apresentado na próxima Seção.

3.5. Identificação de um Ponto Extremo Adjacente de Melhor Qualidade

Após verificar que um ponto extremo não é ótimo de um problema de programação linear, avaliando o PLE No. 2, o método primal simplex procura por um novo ponto extremo de melhor qualidade. Na teoria básica do método primal simplex, a estratégia consiste em passar para um ponto extremo (SBF) adjacente e de melhor qualidade. Duas soluções básicas factíveis (SBFs) são chamadas de adjacentes se as respectivas bases têm $(m - 1)$ colunas da matriz A iguais, isto é, as matrizes B_1 e B_2 representam SBFs adjacentes se essas matrizes tem $(m - 1)$ colunas iguais e, portanto, apresentam apenas uma coluna diferente. Assim, em termos de variáveis básicas, duas SBF adjacentes tem $(m - 1)$ variáveis básicas comuns.

Para entender a transição de uma SBF para outra SBF adjacente e de melhor qualidade é melhor raciocinar a nível de hiperplanos ativos. Para isso, mostramos novamente o PLE No. 2 da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\min z(x) &= z_o(x) - \sum_{j \in R} (z_j - c_j)x_j \\
s.a. \quad & \sum_{j \in R} y_j x_j + x_B = B^{-1}b \quad m \text{ hiperplanos ativos (HA)} \\
& x_j \geq 0 \quad \forall j \in R \quad p = (n - m) \text{ subespaços com os HAs} \\
& x_B \geq 0 \quad m \text{ subespaços com hiperplanos não ativos}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Observações importantes: Para entender a transição para um ponto extremo adjacente e de melhor qualidade, deve-se realizar as seguinte observações:

1. No ponto extremo corrente, identificado pela base B no PLE No. 2, existem n hiperplanos ativos, isto é, m hiperplanos correspondentes as restrições $\sum_{j \in R} y_j x_j + x_B = B^{-1}b$ que sempre se encontram ativos em qualquer contexto e os $p = (n - m)$ hiperplanos ativos restantes são fornecidos pelos $(n - m)$ subespaços relacionados com as variáveis não básicas, isto é, quando $x_j = 0$; $\forall j \in R$ o que acontece no ponto extremo em análise.
2. O ponto extremo corrente tem $p = (n - m)$ candidatos a pontos extremos adjacentes. Cada candidato pode ser identificado liberando um dos $p = (n - m)$ hiperplanos. Assim, se x_k com $k \in R$ que tem valor corrente igual a $x_k = 0$ no ponto extremo em análise for liberado para assumir valores positivos e mantemos todas as outras variáveis não básicas em $x_j = 0$; $\forall j \in R$ e $j \neq k$, então podemos encontrar novos pontos em que $(n - 1)$ hiperplanos se encontram ativos (veja que foi liberado um hiperplano). Esses novos pontos, encontrados aumentando o valor de x_k são factíveis e com $(n - 1)$ HA desde que os valores das variáveis básicas continuem assumindo valores não negativos. O assunto central é que o incremento de x_k deve parar quando a primeira variável básica assume o valor de zero. Seja x_{B_r} a variável básica que chega primeiro ao valor de $x_{B_r} = 0$. Portanto, nesse ponto, quando $x_{B_r} = 0$ foi encontrado um ponto factível e com um HA adicional o que significa que foi encontrado um ponto extremo adjacente. Esse ponto é ponto extremo adjacente do ponto extremo que representa o PLE No. 2 porque tem n HA (os $(n - 1)$ HA que estão também ativos no ponto extremo original e o novo hiperplano fornecido por $x_{B_r} = 0$) e porque compartilha $(n - 1)$ HA com o ponto extremo original. Em resumo, a partir de um ponto extremo conhecido e representado pelo PLE No. 2 podemos encontrar facilmente um ponto extremo adjacente liberando uma variável não básica x_k para assumir valores positivos e desde que esse incremento permita que uma variável básica r chegue ao valor de $x_{B_r} = 0$.
3. Existe a possibilidade de que o incremento de x_k , a partir do valor corrente de zero, não ocasione diminuição nos valores das variáveis básicas, isto é, nenhuma variável básica chega a zero com o incremento de x_k . Nesse caso, não existe ponto extremo adjacente que seja encontrado liberando o hiperplano de x_k .
4. Portanto, com os dados do PLE No. 2 disponível, pode-se identificar os $p = (n - m)$ candidatos a pontos extremos adjacentes. Se todos esses candidatos forem analisados, então encontraremos 3 tipos de comportamento: (a) o candidato é ponto extremo adjacente de

melhor qualidade, (b) o candidato é ponto extremo adjacente de pior qualidade e, (3) o candidato não identifica um ponto extremo adjacente. No último caso estamos caminhando através de um raio com $(n - 1)$ HA sem possibilidade de encontrar um HA adicional que identifique um novo ponto extremo adjacente.

A partir das observações realizadas podemos concluir que a estratégia fundamental do método primal simplex deve ser passar do ponto extremo corrente para um ponto extremo adjacente de melhor qualidade. Um ponto extremo adjacente de melhor qualidade é identificado pelo coeficiente de custo relativo. Assim, no PLE No. 2, um ponto extremo adjacente de melhor qualidade é encontrado a partir da liberação do hiperplano de uma variável não básica x_j com coeficiente de custo relativo positivo, isto é, $\bar{c}_j = (z_j - c_j) > 0$. Caso existam vários candidatos, então pode ser escolhido qualquer um deles, mas preferencialmente aquele com maior valor de coeficiente de custo relativo. Esse assunto é analisado com maior detalhe adiante.

Em resumo, a partir da montagem do PLE No. 2, deve-se proceder da seguinte maneira:

1. Se $\bar{c}_j = (z_j - c_j) \leq 0; \forall j \in R$, então o ponto extremo corrente é ótimo e a solução ótima é seguinte:

$$x_B = B^{-1}b \quad x_N = 0 \quad \implies z_o(x) = c_B B^{-1}b$$

2. Em caso contrário, escolher um x_k com $\bar{c}_k = (z_k - c_k) > 0; k \in R$ e encontrar um ponto extremo adjacente de melhor qualidade. Esse processo é chamado de uma iteração do método primal simplex.

3.5.1. Uma Iteração do Método Primal Simplex

Chamamos de uma iteração do método primal simplex a passagem de um ponto extremo para um ponto extremo adjacente e de melhor qualidade, isto é, a passagem de uma SBF para uma SBF adjacente de melhor qualidade. O mecanismo dessa iteração é apresentado usando a análise algébrica e, portanto, o conceito de SBF.

Seja x_k a variável não básica com $\bar{c}_k = (z_k - c_k) > 0$ escolhida para assumir um valor positivo. Portanto, apenas a variável não básica x_k pode mudar de valor e todas as outras variáveis não básicas permanecem no valor de $x_j = 0; \forall j \in R$ e $j \neq k$. Nesse contexto, analisando as restrições $\sum_{j \in R} y_j x_j + x_B = B^{-1}b$ do PLE No. 2 temos o seguinte:

$$y_k x_k + x_B = B^{-1}b \quad (3.17)$$

em que fazemos as seguintes anotações:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bi} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix} \quad y_k = \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{ik} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_i \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix}$$

Substituindo no sistema anterior temos o seguinte:

$$\begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bi} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_i \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{ik} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k \implies \begin{cases} x_{B1} = \bar{b}_1 - y_{1k}x_k \\ x_{B2} = \bar{b}_2 - y_{2k}x_k \\ \vdots \\ x_{Bi} = \bar{b}_i - y_{ik}x_k \\ \vdots \\ x_{Bm} = \bar{b}_m - y_{mk}x_k \end{cases} \quad (3.18)$$

No sistema (3.18), pretende-se identificar a variável básica x_{Br} que primeiro chega ao valor de zero com o incremento de x_k . Deve-se observar que apenas as variáveis básicas com $y_{ik} > 0$ podem diminuir de valor e elas devem ser as que devem ser consideradas na análise (as outras variáveis básicas aumentam de valor ou permanecem com o mesmo valor). Assim, a variável básica x_{Bi} com $y_{ik} > 0$ atinge o valor zero da seguinte forma:

$$x_{Bi} = \bar{b}_i - y_{ik}x_k = 0 \implies x_k = \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \quad \text{com } y_{ik} > 0$$

Assim, de todas as variáveis básicas candidatas é escolhida a variável x_{Br} que apresenta o menor valor de x_k para chegar ao valor de zero. Portanto, a variável x_{Br} que chega primeiro ao valor de zero com o incremento de valor de x_k (e que nos fornece o hiperplano procurado) é encontrada usando a seguinte relação:

$$x_{Br} \implies x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}; \quad y_{ik} > 0 \right\} \quad (3.19)$$

Caso exista um x_{Br} com essas características e se $\bar{b}_r > 0$, então a SBF adjacente assume a seguinte forma:

$$\begin{cases} x_{Bi} = \bar{b}_i - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \bar{b}_r, & i = 1, 2, \dots, m \quad i \neq r \\ x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \\ \text{Todos os outros } x_j = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Adicionalmente, quando a única variável não básica x_k é liberada para assumir um valor positivo, a função objetivo do PLE No. 2 assume a seguinte forma:

$$z(x) = z_o(x) - (z_k - c_k)x_k$$

Substituindo o valor de x_k na SBF adjacente temos o seguinte:

$$z(x) = z_o(x) - (z_k - c_k) \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} < z_o(x) \quad (3.21)$$

já que $(z_k - c_k) > 0$ e $\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} > 0$. Portanto, a SBF é de melhor qualidade.

Na análise mostrada anteriormente, x_{Br} é chamada de variável básica que deve sair da base e x_k é chamada de variável não básica que deve entrar na base. Assim, as matrizes básicas que representam a SBF corrente e a SBF adjacente diferem em apenas uma coluna da matriz A , isto é, na transição deve sair a coluna de x_{Br} da matriz A e deve entrar a coluna de x_k da matriz A .

Observações adicionais: As seguintes observações são importantes:

1. Se for escolhida a variável básica x_{Br} com valor corrente $x_{Br} = \bar{b}_r = 0$ para sair da base, então a função objetivo não muda. Esse tipo de comportamento acontece quando a SBF corrente é degenerada e existe uma variável básica x_{Bi} com valor corrente igual a zero e com o $y_{ik} > 0$. Nesse caso essa variável sempre será a ganhadora. Assim, a transição é para outra matriz base B mas que identifica a mesma SBF degenerada. Assim, a única forma possível para encontrar uma SBF adjacente é que as variáveis x_{Bi} com valores iguais a zero tenham os valores de $y_{ik} \leq 0$ o que pode acontecer na transição de uma base B para uma base adjacente que representa a mesma SBF degenerada.
2. Pode não existir uma variável x_{Br} candidata a sair da base o que significa que não é possível realizar a transição para uma SBF adjacente. Isso acontece quando todos os $y_{ik} \leq 0$ e de acordo com (3.19) não existe variável básica candidata a sair da base. Nesse contexto, a conclusão é que o problema de programação linear é ilimitado como é analisado em detalhe adiante.

Exemplo 3.10: Uma transição para uma SBF adjacente:

No seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min z(x) &= 4x_1 - x_2 \\ &\quad -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ &\quad -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ &\quad x_1 \geq 0 \\ &\quad x_2 \geq 0 \\ &\quad x_3 \geq 0 \\ &\quad x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

conhecemos a seguinte base B que representa uma SBF:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Essa SBF tem o seguinte PLE No. 2:

$$\begin{aligned} \min z(x) &= 4 + 7x_3 - 3x_4 \\ &\quad x_1 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ &\quad x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ &\quad x_1 \geq 0 \\ &\quad x_2 \geq 0 \\ &\quad x_3 \geq 0 \\ &\quad x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Encontre uma SBF de melhor qualidade.

Verificamos que $\bar{c}_3 = (z_3 - c_3) = -7$ e $\bar{c}_4 = (z_4 - c_4) = 3$ e, portanto, a única variável não básica que pode levar a uma SBF de melhor qualidade é x_4 . Assim, liberando x_4 para assumir valores positivos e mantendo fixo $x_3 = 0$ temos o seguinte:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 \implies \begin{cases} x_1 = 2 - x_4 \\ x_2 = 4 - x_4 \end{cases} \implies x_4 = 2$$

Assim, x_1 é a variável básica que primeiro chega a zero com o incremento do valor de x_4 . Alternativamente, usando a relação (3.19) temos o seguinte:

$$x_4 = \min \left\{ \frac{2}{1}; \frac{4}{1} \right\} = 2 \implies x_4 = 2$$

Portanto, usando (3.20) e (3.21), encontramos os novos valores das variáveis básicas e da função objetivo:

- $x_2 = 4 - \frac{1}{1}(2) = 2$.
- $z(x) = 4 - \frac{2}{1}(3) = -2$ e a nova variável $x_4 = 2$ já calculada.

Montagem do Novo PLE No. 2

Uma vez identificada uma SBF adjacente de melhor qualidade, deve-se montar o PLE No. 2 que represente a nova SBF. Obviamente, essa tarefa pode ser iniciada com a informação da nova base B e montando o novo PLE No. 2 sem usar a informação e a estrutura disponível da SBF anterior. Essa estratégia não é recomendável porque precisaríamos inverter a nova base B . A estratégia mais eficiente consiste em aproveitar a informação e a estrutura do PLE No. 2 da base anterior. Para implementar essa estratégia devemos observar os seguintes fatos:

1. No PLE No. 2 existe uma variável básica para cada restrição e com coeficiente unitário. Adicionalmente, na função objetivo não aparecem as variáveis básicas.
2. Seja x_{B_r} a variável que está saindo da base e x_k a variável que está entrando na base no PLE No. 2 corrente. Portanto, no novo PLE No. 2, a variável x_{B_r} deve se tornar não básica e a variável x_k deve se tornar básica.
3. Portanto, para encontrar o novo PLE No. 2 a partir do PLE No. 2 corrente, precisamos apenas isolar a variável x_k na restrição r e substituir essa relação em todas as outras restrições e na função objetivo. Dessa forma, x_k desaparece de todas as relações, exceto na restrição r , e a variável x_{B_r} pode aparecer em todas as relações indistintamente. Adicionalmente, a restrição da linha r é modificada de forma que a variável x_k tenha coeficiente unitário. Essa nova estrutura representa o novo PLE No. 2 porque existe apenas uma variável básica para cada restrição e com coeficientes unitários (veja que todas as variáveis básicas das restrições diferentes da restrição r não foram modificadas), onde x_k é a variável básica da restrição r em substituição de x_{B_r} . Adicionalmente, na função objetivo aparecem apenas variáveis não básicas.

4. A forma mais prática de transformar o PLE No. 2 corrente no PLE No. 2 novo é realizar operações elementares de matrizes. Essa estratégia é conhecida como pivotagem. Assim, inicialmente a restrição r é dividida por y_{rk} para que o coeficiente de x_k nessa restrição tenha coeficiente unitário. Depois, essa restrição é multiplicada por um valor adequado de forma que ao ser somado com cada uma das outras restrições elimine a variável x_k em todas as outras restrições. Em outras palavras, deve-se implementar operações elementares de matrizes entre a restrição r e a restrição i de forma que ao somar essas restrições se gere uma nova restrição i sem a presença da variável x_k . Essa operação é realizada com cada restrição $i \neq r$ e com a função objetivo.

Levando em conta as observações anteriores, o PLE No. 2 corrente é transformado no PLE No. 2 através de operações elementares de matrizes no PLE No. 2 corrente.

Exemplo 3.11: Pivotagem para encontrar o novo PLE No. 2:

Seja o PLE No. 2 do Exemplo 3.10:

$$\begin{aligned} \min \quad z(x) &= 4 + 7x_3 - 3x_4 \\ x_1 &- 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Encontre o PLE No. 2 da SBF adjacente encontrada com a entrada na base da variável não básica x_4 e a saída da base da variável básica x_1 .

A estratégia consiste em transformar a primeira restrição de forma que x_4 tenha coeficiente unitário (no caso x_4 já tem coeficiente unitário e não precisa de transformação) e multiplicar essa restrição por um fator adequado para eliminar a variável x_4 das outras relações. Assim, multiplicando a primeira restrição por -1 e somando com a outra restrição temos o seguinte:

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

que representa a nova segunda restrição. Adicionalmente, multiplicando a primeira restrição por -3 e somando na função objetivo encontramos a nova forma da função objetivo:

$$z(x) = -2 + 3x_1 + x_3$$

Portanto, o novo PLE No. 2 assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad z(x) &= -2 + 3x_1 + x_3 \\ x_1 &- 2x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Como já foi mencionado, esse novo PLE No. 2 pode ser montado usando apenas a informação da base B que representa essa nova SBF que é a submatriz formada pelas colunas de x_2 e x_4 da matriz A (veja o Exemplo 3.10) e que assume a seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Entretanto, esse não é o procedimento mais eficiente porque precisaria inverter a matriz B e, portanto, é mais simples transformar o PLE No. 2 corrente no novo PLE No. 2 através de operações elementares de matrizes, operação chamada de pivotagem. Finalmente, deve-se observar que o novo PLE No. 2 representa uma SBF ótima.

3.6. Critério de Parada do Método Primal Simplex: Existe Solução Ótima Finita ou o Problema é Ilimitado

A transição de uma SBF para outra SBF adjacente, como foi mostrado anteriormente, termina em um número finito de passos. Assim, o processo de transições através de SBFs termina quando for verificado que na avaliação da SBF corrente acontece um dos seguintes fatos:

1. A SBF corrente é ótima do problema de programação linear. Neste caso é válida a seguinte relação:

$$\bar{c}_j = (z_j - c_j) \leq 0 \quad \forall j \in R$$

2. O problema de programação linear é ilimitado.

Este caso acontece quando escolhemos uma variável não básica x_k com $\bar{c}_k = (z_k - c_k) > 0$, mas os elementos de y_k são todos não positivos, isto é, $y_k \leq 0$. Nesse caso, de acordo com a relação (3.19) não existe uma variável básica candidata a sair da base. Em outras palavras, quando x_k se torna positivo encontramos novos pontos factíveis com $(n - 1)$ HALI, mas nunca encontramos um HA adicional para encontrar um novo ponto com n HALI. Usando outro tipo de raciocínio, pode-se afirmar que com o incremento do valor de x_k algumas variáveis básicas aumentam de valor e outras permanecem no valor corrente, mas nenhuma diminui de valor e, portanto, é impossível que alguma variável básica assumo o valor de zero e forneça um HA. Nesse caso, o problema é ilimitado.

Analisamos com mais detalhes os dois tipos de comportamentos mencionados anteriormente.

3.6.1. O Problema de Programação Linear tem Ótimo Finito

Quando a solução ótima de um problema de programação linear for finito, então existe um ponto extremo que é ótimo do problema de acordo com o Teorema 3.2. Entretanto, nesse contexto podem aparecer algumas particularidades especiais. Assim, supor que o PLE No. 2 apresentado em (3.15) representa a solução ótima finita para a SBF corrente. Nesse contexto, é verdadeira a relação $\bar{c}_j = (z_j - c_j) \leq 0 \quad \forall j \in R$. Entretanto podem acontecer os seguintes casos especiais:

1. Existe apenas uma solução ótima finita.

Esse tipo de comportamento acontece quando $\bar{c}_j = (z_j - c_j) < 0 \quad \forall j \in R$. Assim, a entrada de qualquer variável não básica deve produzir um aumento no valor da função objetivo e, portanto, não existe a possibilidade do aparecimento de outras soluções ótimas alternativas.

2. Existem soluções ótimas alternativas.

Este caso acontece quando existe pelo menos uma variável não básica x_j com coeficiente de custo relativo $\bar{c}_j = (z_j - c_j) = 0$. Nesse caso, a variável não básica x_j pode entrar na base e aumentar de valor, mas a função objetivo não muda de valor. Portanto, o incremento do valor de x_j , a partir de valor corrente de zero, encontra novas soluções ótimas alternativas. Nesse caso ainda podem acontecer dois casos especiais:

- Existe um ponto extremo ótimo alternativo.

Esse comportamento acontece quando o y_j correspondente ao x_j que tem $\bar{c}_j = (z_j - c_j) = 0$ não cumpre com a relação $y_j \leq 0$, isto é, y_j tem pelo menos um elemento positivo. Assim, a transição encontra uma nova SBF adjacente da SBF corrente. Portanto, todos os pontos encontrados por combinação convexa desses pontos extremos são soluções ótimas alternativas.

- Existe um raio ótimo.

Esse comportamento acontece quando o y_j correspondente ao x_j que tem $\bar{c}_j = (z_j - c_j) = 0$ cumpre com a relação $y_j \leq 0$. Assim, o incremento de x_j gera novos pontos ótimos em um processo de incremento indefinido sem a possibilidade de encontrar um HA adicional para completar os n HALI. Nesse caso, todos os pontos encontrados são pontos de um raio que tem como vértice o ponto extremo corrente e, portanto, todos os pontos de um raio são ótimos alternativos, mas a solução ótima, isto é, o valor de $z(x)$ é finito.

Generalizando, se existem várias variáveis não básicas com valores de $\bar{c}_j = (z_j - c_j) = 0$, então existe a possibilidade de encontrar vários pontos extremos ótimos e vários raios ótimos. Nesse contexto, pode-se afirmar que é ótimo do problema de programação linear todo ponto encontrado por combinação convexa dos pontos extremos ótimos mais uma combinação linear não negativa dos raios ótimos.

Exemplo 3.12: O problema de PL tem solução ótima finita única:

Seja o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min \quad z(x) &= 4x_1 - x_2 \\ &\quad -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ &\quad -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ &\quad x_1 \geq 0 \\ &\quad x_2 \geq 0 \\ &\quad x_3 \geq 0 \\ &\quad x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

conhecemos a seguinte base B que representa uma SBF:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificar se essa SBF é ótima e veja a possibilidade da existência de soluções ótimas alternativas.

Para verificar se a SBF corrente é ótima precisamos apenas calcular os coeficientes de custo relativo das variáveis não básicas x_1 e x_3 . Esses valores são os seguintes:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad c_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \quad a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_1 = c_B B^{-1} a_1 - c_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - 4 = -3$$

$$\bar{c}_3 = c_B B^{-1} a_3 - c_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -1$$

Assim, pode-se concluir que a SBF corrente é ótima e existe apenas essa solução ótima já que todos os coeficientes de custo relativo das variáveis não básicas são negativos.

Exemplo 3.13: O problema de PL tem soluções ótimas alternativas:

Seja o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min \quad z(x) \quad &= x_1 - x_2 \\ &-x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ &-x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ &x_1 \geq 0 \\ &x_2 \geq 0 \\ &x_3 \geq 0 \\ &x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

conhecemos a seguinte base B que representa uma SBF:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificar se essa SBF é ótima e veja a possibilidade da existência de soluções ótimas alternativas.

Para verificar se a SBF corrente é ótima precisamos apenas calcular os coeficientes de custo relativo das variáveis não básicas x_1 e x_3 . Esses valores são os seguintes:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad c_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c_1 = 1 \quad c_3 = 0$$

$$\bar{c}_1 = c_B B^{-1} a_1 - c_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - 1 = 0$$

$$\bar{c}_3 = c_B B^{-1} a_3 - c_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -1$$

Assim, pode-se concluir que a SBF corrente é ótima, mas existem soluções ótimas alternativas já que $\bar{c}_1 = 0$. Para saber se existe um ponto extremo ótimo alternativo ou se existe um raio ótimo precisamos encontrar y_1 da seguinte forma:

$$y_1 = B^{-1} a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, existe um ponto extremo alternativo encontrado com a entrada na base de x_1 e a saída da base de x_4 . Esse novo ponto extremo é $x = (2, 4, 0, 0)$. Assim, o conjunto de pontos extremos pode ser encontrado usando a relação:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (1 - \lambda) \quad \lambda \in [0, 1]$$

que são pontos encontrados por combinação convexa de dois pontos extremos.

Exemplo 3.14: O problema de PL tem um raio ótimo:

Seja o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min \quad z(x) \quad &= x_1 - 2x_2 \\ &-x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ &-x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ &x_1 \geq 0 \\ &x_2 \geq 0 \\ &x_3 \geq 0 \\ &x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

conhecemos a seguinte base B que representa uma SBF:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Verificar se essa SBF é ótima e veja a possibilidade da existência de soluções ótimas alternativas.

Para verificar se a SBF corrente é ótima precisamos apenas calcular os coeficientes de custo relativo das variáveis não básicas x_3 e x_4 . Esses valores são os seguintes:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad c_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c_3 = 0 \quad c_4 = 0$$

$$\bar{c}_3 = c_B B^{-1} a_3 - c_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

$$\bar{c}_4 = c_B B^{-1} a_4 - c_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -1$$

Assim, pode-se concluir que a SBF corrente é ótima, mas existem soluções ótimas alternativas já que $\bar{c}_3 = 0$. Para saber se existe um ponto extremo ótimo alternativo ou se existe um raio ótimo precisamos encontrar y_3 da seguinte forma:

$$y_3 = B^{-1} a_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Portanto, não existe um ponto extremo alternativo. Assim, existe um raio ótimo que tem a SBF corrente como vértice. Para encontrar a forma matemática do raio ótimo usamos a relação (3.18) para a SBF corrente e, dessa forma, encontramos o seguinte:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + 2x_3 \\ x_2 &= 4 + x_3 \end{aligned}$$

Usando as relações anteriores e lembrando que x_3 pode assumir valores positivos e x_4 permanece fixo em $x_4 = 0$, então os novos valores de x obtidos com a variação positiva de x_3 assumem a seguinte forma:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 \quad x_3 \geq 0$$

que é exatamente a equação do raio ótimo que tem como vértice a SBF corrente.

3.6.2. O Problema de Programação Linear é Ilimitado

O problema de programação linear pode ser ilimitado. Esse fato acontece quando for escolhida uma variável não básica x_k com $\bar{c}_k = (z_k - c_k) > 0$, mas $y_k \leq 0$. Assim, um incremento do valor de x_k , a partir do valor corrente de zero, não produz a diminuição de nenhuma variável básica x_{B_i} . Portanto, o incremento de x_k gera novos pontos factíveis e com $(n - 1)$ HALI, mas sem a possibilidade de encontrar o HA adicional. Por esse motivo o problema é ilimitado.

De (3.18) temos o seguinte:

$$x_B = B^{-1}b - y_k x_k \quad (3.22)$$

Como $y_k \leq 0$ então todos os elementos de x_B aumentam de valor ou permanecem com o mesmo valor corrente. Assim, a variável não básica x_k pode crescer indefinidamente e, portanto, de (3.20) a função objetivo assume a seguinte forma:

$$z(x) = z_o(x) - (z_k - c_k)x_k \implies -\infty \quad \text{quando } x_k \implies \infty$$

Portanto, o problema é ilimitado. A partir de (3.22) vamos representar o vetor x da seguinte forma:

$$x = \begin{array}{|c|} \hline x_B \\ \hline x_N \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline B^{-1}b \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline -y_k \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \end{array} x_k \quad \begin{array}{l} \updownarrow m \\ \updownarrow (n-m) \end{array} \quad x_k \geq 0$$

onde na parcela inferior do último vetor existe apenas um elemento igual a 1 e na posição correspondente com a variável não básica x_k . Deve-se observar que a relação anterior mostra a equação de um raio cujo vértice é a SBF corrente (primeiro vetor do lado direito) e a direção do raio é representado pelo segundo vetor do lado direito. Adicionalmente, pode-se provar facilmente que nesse ponto extremo e para essa equação do raio, a relação $c \cdot d$, que caracteriza um problema como sendo ilimitado, é verdadeira. Assim, procedemos da seguinte forma:

$$c_B = [c_B \quad c_N]$$

$$d = \begin{bmatrix} -y_k \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c \, d = -c_B y_k + c_k = -z_k + c_k = -(z_k - c_k) < 0 \implies c \, d < 0$$

já que sabemos que $z_k - c_k > 0$. Pode-se ainda provar que d realmente é uma direção extrema como pode ser observado no Exemplo 3.15.

Exemplo 3.15: Provar que vetor d encontrado anteriormente representa uma direção extrema do conjunto convexo $X = \{x : \quad A x = b; \quad x \geq 0\}$.

Inicialmente provamos que d é uma direção de X e depois que ela é uma direção extrema de X .

- Provamos que d é uma direção de X :

O conjunto de direções de X assume a seguinte forma:

$$D = \{d : \quad A d = 0; \quad d \geq 0; \quad d \neq 0\}$$

Verificamos que d pertence a $A d = 0$:

$$A \, d = \begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_k \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -B y_k + a_k = -B(B^{-1} a_k) + a_k = -a_k + a_k = 0$$

Agora verificamos que $d \geq 0$:

Trivialmente verificamos que $d \geq 0$ já que $y_k \leq 0$. Adicionalmente, $d \neq 0$ já que tem pelo menos um elemento igual a 1.

Portanto, d é um elemento do conjunto D e, por esse motivo, representa uma direção de X .

- Provamos que d é uma direção extrema de X :

Nesse caso, deve-se provar que em d existem n HALI, sendo que d é um elemento do conjunto de direções normalizado. Assim, D_n assume a seguinte forma:

$$D_n = \{d : \quad Ad = 0; \quad d \geq 0; \quad d_1 + d_2 + \dots + d_n = 1; \quad d \neq 0\}$$

Já foi provado que $d \in D$ e, portanto, a D_n . Assim, falta provar que em d existem n HALI. Para essa prova podemos verificar o seguinte:

1. Os m HALI de $A d = 0$ sempre estão ativos.
2. Analisando a estrutura de d , pode-se verificar facilmente que existem $(n - m) - 1$ elementos iguais a zero e, portanto, representam $(n - m) - 1$ HALI.
3. Adicionalmente, o hiperplano de normalização também sempre se encontra ativo. Portanto, em d existem $p = m + (n - m) - 1 + 1 = n$ HALI e foi provado que d é um ponto extremo de D_n e, dessa forma, é uma direção extrema de X .

Exemplo 3.16: A partir da SBF formada por uma base com as colunas das variáveis x_1 e x_2 verificar que o seguinte problema de programação linear é ilimitado.

$$\begin{aligned} \min \quad z(x) &= x_1 - 3x_2 \\ &\quad -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ &\quad -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ &\quad x_1 \geq 0 \\ &\quad x_2 \geq 0 \\ &\quad x_3 \geq 0 \\ &\quad x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Conhecendo a SBF procedemos da seguinte forma:

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad c_B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \quad R = \{3, 4\}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \implies B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (z_j - c_j) = c_B B^{-1} a_j - c_j$$

$$(z_3 - c_3) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 1 \implies (z_3 - c_3) = 1 > 0$$

$$(z_4 - c_4) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -2 \implies (z_4 - c_4) = -2 < 0$$

Como $(z_3 - c_3) = 1 > 0$, então x_3 é candidata a entrar na base. Assim, deve-se calcular y_3

$$y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} < 0$$

Como $y_3 < 0$, então o problema é ilimitado. Assim, o incremento de x_3 a partir do valor corrente de zero gera os seguintes pontos:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3; \quad x_3 \geq 0$$

que representa a equação de um raio através do qual o problema de programação linear tende a $-\infty$.

3.7. O Método Primal Simplex

Após apresentar todos os conceitos relacionados com a teoria do método primal simplex, pode-se iniciar o processo de sistematização desse método. Esse processo é iniciado nesta Seção. Deve-se observar que a versão apresentada nesta Seção não é a preferida pelo esforço computacional necessário para processar esse algoritmo. Assim, a proposta apresentada tem mais valor conceitual.

Seja o problema de programação linear na forma padronizada.

$$\begin{aligned} \text{Min } z(x) &= c x \\ \text{s.a.} \quad & A x = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

em que $\text{Posto}[A] = \text{Posto}[A, b] = m < n$ e A é uma matriz de dimensão $m \times n$.

O algoritmo primal simplex assume a seguinte forma:

■ **Passo inicial:**

Escolher uma SBF inicial com base B . Portanto, o processo pode ser iniciado com a informação de uma base que identifica uma SBF. No próximo capítulo é analisado o processo para encontrar uma SBF caso não exista essa informação.

■ **Passo principal:**

1. Resolver o sistema $B x_B = b$, isto é, calcular $x_B = B^{-1}b = \bar{b}$. Assim, temos a solução corrente: $x_B = B^{-1}b = \bar{b}$, $x_N = 0$ e $z(x) = c_B x_B = c_b B^{-1}b = c_B \bar{b}$.
2. Resolver o sistema $w B = c_B$, isto é, calcular $w = c_B B^{-1}$. w é conhecido como vetor de variáveis duais e está relacionado com o problema dual do problema corrente e analisado adiante.

Calcular os coeficientes de custo relativos das variáveis não básicas:

$$\bar{c}_j = (z_j - c_j) = c_B B^{-1} a_j - c_j = w a_j - c_j \quad \forall j \in R$$

R é o conjunto de índices das variáveis não básicas. Nesse contexto, encontrar:

$$(z_k - c_k) = \max_{j \in R} (z_j - c_j)$$

- a) Se $(z_k - c_k) \leq 0 \implies$ pare porque a SBF corrente é ótima.
 - b) Em caso contrário, ir ao passo 3 com x_k sendo a variável não básica candidata a entrar na base.
3. Resolver o sistema $B y_k = a_k$, isto é, encontrar $y_k = B^{-1}a_k$.
 - a) Se $y_k \leq 0 \implies$ pare porque o problema é ilimitado. Assim, o problema é ilimitado acompanhando o raio:

$$x = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_k \\ e_k \end{bmatrix} x_k : x_k \geq 0$$

- b) Em caso contrário, ir ao passo 4.
4. x_k entra na base e a variável básica x_{B_r} , que deve sair da base, é encontrada usando a seguinte relação:

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

Atualizar a base B com a entrada de a_k e a saída de a_{B_r} , atualizar também o conjunto R e voltar ao passo 1.

Observações importantes: As seguintes observações devem ser levadas em conta:

1. Modificações caso o problema seja de maximização. Nesse caso, deve-se transformar o problema de maximização em um problema de minimização usando a seguinte relação:

$$\max f(x) \iff -[\min -f(x)]$$

Outra alternativa consiste em modificar o critério de otimalidade. Assim, no problema de maximização se

$$(z_k - c_k) \geq 0$$

então a SBF corrente é ótima. Em caso contrário, selecionar um x_k com o coeficiente de custo relativo de menor valor, isto é, com um $(z_k - c_k) = \min\{(z_j - c_j); \forall j \in R\}$

2. Pode ser provado que o algoritmo primal simplex converge em um número finito de passos porque o número de SBFs é finito (ver Teorema 3.4).

Exemplo 3.17: Usando o método primal simplex resolver o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min z(x) &= x_1 - 2x_2 \\ &\quad -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ &\quad -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ &\quad x_1 \geq 0 \\ &\quad x_2 \geq 0 \\ &\quad x_3 \geq 0 \\ &\quad x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Assumir que a base B , formada pelas colunas de x_3 e x_4 , representa uma SBF.

Nesse problema, a matriz A e os vetores c e b assumem a seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

■ Passo inicial:

$$B = \begin{bmatrix} a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

■ Passo principal:

1. Calcular as variáveis básicas e a função objetivo:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad c_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c_N = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \quad R = \{1, 2\}$$

$$x_B = B^{-1}b = I b = b = \bar{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad z(x) = c_B x_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = 0$$

2. Verificando otimalidade:

$$w = c_B B^{-1} = c_B I = c_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(z_1 - c_1) = w a_1 - c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - 1 = -1 \Rightarrow (z_1 - c_1) = -1$$

$$(z_2 - c_2) = w a_2 - c_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - (-2) = 2 \Rightarrow (z_2 - c_2) = 2$$

Como $(z_2 - c_2) = 2 > 0$, então a SBF corrente não é ótima e x_2 é candidata a entrar na base.

3. Atualizar a coluna de x_2 e verificar se o problema é ilimitado:

$$y_2 = B^{-1}a_2 = I a_2 = a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Portanto, existe mudança de base (o problema não é ilimitado a partir da SBF corrente).

4. Encontrar a variável básica que deve sair da base:

$$\min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{6}{2} \right\} = 2 \implies \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = 2$$

Portanto, a variável básica x_3 deve sair da base e $R = \{1, 3\}$.

1. Calcular as variáveis básicas e a função objetivo:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad c_B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \quad c_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \{1, 3\}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \implies B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad z(x) = c_B x_B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = -4$$

2. Verificando otimalidade:

$$w = c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(z_1 - c_1) = w a_1 - c_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - 1 = 1 \implies (z_1 - c_1) = 1$$

$$(z_3 - c_3) = w a_3 - c_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -2 \implies (z_3 - c_3) = -2$$

Como $(z_1 - c_1) = 1 > 0$, então a SBF corrente não é ótima e x_1 é candidata a entrar na base.

3. Atualizar a coluna de x_1 e verificar se o problema é ilimitado:

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, existe mudança de base (o problema não é ilimitado a partir da SBF corrente).

4. Encontrar a variável básica que deve sair da base:

$$\min \left\{ \frac{2}{1} \right\} = 2 \implies \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = 2$$

Portanto, a variável básica x_4 deve sair da base e $R = \{3, 4\}$.

1. Calcular as variáveis básicas e a função objetivo:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad c_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \quad c_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \{3, 4\}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \implies B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad z(x) = c_B x_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -6$$

2. Verificando otimalidade:

$$w = c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(z_3 - c_3) = w a_3 - c_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0 \implies (z_3 - c_3) = 0$$

$$(z_4 - c_4) = w a_4 - c_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -1 \implies (z_4 - c_4) = -1$$

Portanto, como os dois coeficientes de custo relativos são menores ou iguais a zero, então a SBF corrente é ótima e o processo termina encontrando um ponto extremo ótimo finito. A solução ótima é a seguinte:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observações: Deve-se mencionar as seguintes observações importantes:

1. A estratégia de solução apresentada não é eficiente. Veja que em cada passo, deve-se montar a matriz B e invertê-la. Esse processo é demorado, mas apresenta a vantagem de que os erros de arredondamento são insignificantes já que cada iteração é independente da anterior. A forma mais tradicional de realizar as iterações no método primal simplex consiste em usar a estrutura do PLE No. 2 para a base que representa a SBF corrente e através de operações elementares de matrizes encontrar o PLE No. 2 para a SBF adjacente. Entretanto, a estratégia

apresentada pode ser usada esporadicamente em um algoritmo primal simplex mais geral. Assim, esporadicamente, isto é, a cada 200 iterações pode ser conveniente descartar todos os cálculos e com a informação da base B da SBF corrente fazer todos os cálculos mostrados anteriormente. Essa estratégia pretende eliminar os erros de arredondamento já acumulados usando transformações de um PLE No. 2 da SBF corrente para o PLE No. 2 da SBF adjacente.

2. A forma tradicional de realizar uma transição no método primal simplex consiste em transformar o PLE No. 2 da SBF corrente no PLE No. 2 da SBF adjacente através de operações elementares de matrizes. Esse processo de transformação, que é apresentado na próxima Seção, é chamado de pivotagem.
3. No exemplo resolvido anteriormente, pode-se verificar que $(z_3 - c_3) = 0$ e, portanto, existem soluções ótimas alternativas. Se tentamos introduzir a variável não básica x_3 na base acontece o seguinte:

$$y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} < 0$$

que indica que não existe a possibilidade de encontrar um HALI que identifique um ponto extremo ao incrementar o valor de x_3 . Portanto, não existe ponto extremo adjacente e existe um raio ótimo definido pela seguinte relação:

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 \quad x_3 \geq 0$$

3.8. A Método Primal Simplex em Formato de Quadro - Forma Sistemática de Resolver um Problema de Programação Linear

Nesta Seção, apresenta-se o formato mais usado para implementar o processo de resolução de problemas de programação linear. O formato na forma de quadro e, portanto, chamado de Quadro Simplex na verdade é uma forma de representar o PLE No. 2 para a SBF corrente no formato de quadro. Assim, deve-se deduzir novamente o PLE No. 2 em um formato mais geral e, na sequência, sugere-se a apresentação desse problema em formato de quadro.

Seja o problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min \quad & z(x) = c x \\ \text{s.a.} \quad & A x = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Conhecida uma base B que representa uma SBF, então o problema anterior pode ser transformado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \min \quad z(x) \\
& \text{s.a.} \quad \begin{aligned}
& z(x) - c_B x_B - c_N x_N = 0 \\
& B x_B + N x_N = b \\
& x_B \geq 0 \\
& x_N \geq 0
\end{aligned}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Agora realizamos manipulações algébricas para eliminar x_B da função objetivo e deixar os coeficientes das variáveis básicas x_{B_i} com coeficientes unitários nas restrições principais, isto é, vamos montar o PLE No. 2 com uma estrutura ligeiramente diferente. Das restrições $B x_B + N x_N = b$ temos o seguinte:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N \tag{3.26}$$

A relação anterior é multiplicada por c_B :

$$c_B x_B = c_B B^{-1}b - c_B B^{-1}N x_N \tag{3.27}$$

Substituindo $c_B x_B$ de (3.27) em $z(x) - c_B x_B - c_N x_N = 0$ encontramos o seguinte:

$$z(x) - c_B B^{-1}b + c_B B^{-1}N x_N - c_N x_N = 0 \implies z(x) + [c_B B^{-1}N - c_N]x_N = c_B B^{-1}b \tag{3.28}$$

Ordenando (3.26) e (3.28) temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
& z(x) + 0 x_B + [c_B B^{-1}N - c_N]x_N = c_B B^{-1}b \\
& \quad \quad \quad x_B \quad \quad \quad + B^{-1}N x_N = B^{-1}b
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Deve-se observar que (3.29) é apenas o PLE No. 2 em um formato ligeiramente diferente ao apresentado anteriormente. Adicionalmente, o sistema de $m+1$ equações (3.28) pode ser colocado em formato de quadro da seguinte forma:

	$z(x)$	x_B	x_N	RHS	
$z(x)$	1	0	$c_B B^{-1}N - c_N$	$c_B B^{-1}b$	← Linha 0
x_B	0	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$	← Linha 1 a m

No quadro anterior, a coluna independente é normalmente chamada de coluna RHS do inglês Right Hand-Side. Assim, no quadro anterior, chamado de quadro simplex, está representado o PLE No. 2 montado usando a informação de base B que representa a SBF corrente. Portanto,

analisando esse quadro podemos encontrar as mesmas conclusões obtidas analisando o PLE No. 2 na representação completa.

Observações importantes: Em relação ao quadro simplex, deve-se realizar as seguintes observações:

1. Os elementos do vetor $c_B B^{-1}N - c_N$ são os coeficientes de custo relativo das variáveis não básicas $x_j \quad \forall j \in R$, isto é, representam os coeficientes de custo relativo das variáveis não básicas dados por $\bar{c}_j = (z_j - c_j)$. Portanto, analisando esse vetor podemos responder se a SBF corrente é ótima ou não é ótima. Também, analisando os elementos desse vetor podemos identificar os candidatos a pontos extremos adjacentes. Adicionalmente, analisando cada $\bar{c}_j$ podemos descobrir os candidatos a pontos extremos adjacentes de melhor, igual e pior qualidade. Finalmente, para cada x_j e seu correspondente $\bar{c}_j$ podemos identificar as SBFs de melhor qualidade analisando o correspondente y_k . Deve-se observar que existem $(n - m)$ candidatos a SBF adjacente.
2. A matriz $B^{-1}N$ tem $(n - m)$ colunas e cada coluna é o vetor y_k relacionado com cada variável não básica x_j .
3. O escalar $c_B B^{-1}b$ representa o valor da função objetivo para a SBF corrente. Assim, temos que $z_o(x) = c_B B^{-1}b$.
4. O vetor $B^{-1}b$ representa os valores das variáveis básicas na SBF corrente. Assim, temos que $x_B = B^{-1}b$. Obviamente, na SBF corrente temos que $x_N = 0$.
5. A primeira coluna do quadro simplex (a coluna de $z(x)$) aparece apenas para mostrar a compatibilidade do quadro simplex com o PLE No. 2. Portanto, o quadro simplex mostra o PLE No. 2 montado para a SBF corrente. A partir desse quadro, pode-se montar o quadro simplex da SBF adjacente e de melhor qualidade por meio de operações elementares de matrizes.
6. Em resumo, no quadro simplex existe toda a informação para verificar a otimalidade da SBF corrente e para realizar a transição para a SBF adjacente de melhor qualidade.
7. A matriz identidade é parte integrante do modelo e não depende da base B que representa a SBF. Veja a estrutura do PLE No. 2.

3.8.1. A Transição para uma SBF Adjacente

O quadro simplex corrente, que representa o PLE No. 2 para a SBF corrente, pode ser transformado no quadro simplex para a SBF adjacente e de melhor qualidade. Essa operação é realizada por meio de operações elementares de matrizes, chamada de pivagem. Nessa transformação, deve-se atualizar as variáveis básicas e não básicas, os coeficientes de custo relativo das variáveis não básicas, as colunas relacionadas com os vetores y_j e os valores da função objetivo e das variáveis básicas.

Todas essas transformações são obtidas na operação de pivagem. Assim, seja a variável não básica x_k que deve entrar na base e a variável básica x_{B_r} que deve sair da base. Portanto, para

transformar o quadro simplex da SBF corrente para um quadro simplex que represente a SBF adjacente, deve-se realizar as seguintes operações:

1. Dividir a linha r por y_{rk} .
2. Atualizar cada linha $i = 1, \dots, m$ e $i \neq r$ adicionando a essa linha $-y_{ik}$ vezes a nova linha r .
3. Atualizar a linha 0 adicionando a essa linha $-(z_k - c_k)$ vezes a nova linha r .

Finalmente, deve-se atualizar a relação de variáveis básicas e não básicas.

3.8.2. Algoritmo Primal Simplex no Formato de Quadro

O algoritmo primal simplex no formato de quadro, para o problema de minimização, assume a seguinte forma:

- **Passo Inicial:** Com uma base B conhecida e que identifica uma SBF montar o seguinte quadro simplex inicial.

	$z(x)$	x_B	x_N	RHS
$z(x)$	1	0	$c_B B^{-1} N - c_N$	$c_B B^{-1} b$
x_B	0	I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

- **Passo Principal:** Identificar x_k usando a seguinte relação:

$$(z_k - c_k) = \max_{j \in R} (z_j - c_j)$$

1. Verificar a otimalidade da SBF corrente:

Se $(z_k - c_k) \leq 0$, então a SBF corrente é ótima e pare. Em caso contrário, fazer o seguinte:

- a) Se $y_k \leq 0$, então pare o processo com a informação de que o problema é ilimitado. Nesse caso, a equação do raio através da qual a função objetivo tende a $-\infty$ é a seguinte:

$$x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_k \\ e_k \end{bmatrix} x_k : \quad x_k \geq 0$$

onde e_k é um vetor de dimensão $(n - m)$ com elementos iguais a zero, exceto na posição correspondente a x_k onde vale 1.

- b) Em caso contrário, isto é, se existe pelo menos um elemento positivo em y_k , então identificar a linha r e a variável básica x_{B_r} que deve sair da base usando a seguinte relação:

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} \geq 0 \right\}$$

A continuação implementar a pivotagem do quadro usando y_{rk} para a pivotagem e atualizar as variáveis básicas e não básicas (x_k entra na base e x_{B_r} sai da base). Repetir o passo principal até atingir a convergência.

Observação importante: No início do Passo Principal, escolhe-se a variável não básica x_k que tem o maior valor de coeficiente de custo relativo $\bar{c}_k$. Essa é uma proposta realizada na origem do método primal simplex. Entretanto, não existe garantia de que esse tipo de escolha permita que um problema de programação linear seja resolvido em um número menor de iterações. Assim, em princípio, pode-se escolher como candidata a entrar na base qualquer variável não básica que tenha coeficiente de custo relativo positivo. Em outras palavras, de todas as candidatas a SBF adjacente e de melhor qualidade podemos escolher, em princípio, qualquer uma delas.

Exemplo 3.18: Usando o método primal simplex, resolver o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min z(x) &= x_1 - 2x_2 \\ &\quad -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ &\quad -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ &\quad x_1 \geq 0 \\ &\quad x_2 \geq 0 \\ &\quad x_3 \geq 0 \\ &\quad x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Assumir que a base B , formada pelas colunas de x_3 e x_4 , representa uma SBF.

Nesse problema, a matriz A e os vetores c e b assumem a seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- Passo inicial: Montagem do quadro simplex inicial.

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow N = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}N = N$$

$$c_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c_N = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \quad R = \{1, 2\}$$

$$c_B B^{-1} b = c_B b = 0$$

Com esses dados, pode-se montar o quadro inicial mostrado na Figura 3.3.

- Passo principal:

$$(z_k - c_k) = \max \{-1, 2\} \implies (z_2 - c_2) = 2 \quad k = 2$$

Assim x_2 é candidata a entrar na base.

1. Verificar otimalidade:

x_2 é candidata a entrar na base.

2. Verificar se o problema é ilimitado. y_2 tem a seguinte forma:

$$y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Portanto, existe mudança de base. A variável básica que deve sair da base é a seguinte:

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \left\{ \frac{2}{1}; \frac{6}{2} \right\} = 2$$

Portanto, a variável x_3 deve sair da base. Após realizar pivotagem, encontramos o segundo quadro mostrado na Figura 3.3.

- Continuando o processo de otimização encontramos a solução ótima mostrada na Figura 3.3. Deve-se observar que todos os cálculos geralmente são realizados no próprio quadro simplex. A solução ótima é a seguinte:

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = x_4 = 0 \implies z(x) = -6$$

Também, deve-se observar que $(z_3 - c_3) = 0$ e como $y_3 = [-1, -2]^t$, então existe um raio ótimo nesse problema de programação linear.

Observações importantes: Em relação ao quadro simplex, as seguintes observações são importantes:

1. Do quadro simplex temos o seguinte:

$$z(x) = c_B B^{-1} b - [c_B B^{-1} N - c_N] x_N = c_B B^{-1} b - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j \quad (3.30)$$

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N = B^{-1} b - \sum_{j \in R} y_j x_j \quad (3.31)$$

	$z(x)$	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
$z(x)$	1	-1	2	0	0	0	$\min\{\frac{2}{1}, \frac{6}{2}\} = 2$
x_3	0	-1	1	1	0	2	
x_4	0	-1	2	0	1	6	
$z(x)$	1	1	0	-2	0	-4	$\min\{\frac{2}{1}\} = 2$
x_2	0	-1	1	1	0	2	
x_4	0	1	0	-2	1	2	
$z(x)$	1	0	0	0	-1	-6	
x_2	0	0	1	-1	1	4	
x_1	0	1	0	-2	1	2	

Figura 3.3: Quadro primal simplex do Exemplo 3.18.

a) De (3.30) temos o seguinte:

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x_j} = -(z_j - c_j) \quad \forall i \in R \quad (3.32)$$

Assim, é possível diminuir $z(x)$ aumentando x_j desde que $(z_j - c_j) > 0$.

b) De (3.31) temos o seguinte:

$$\frac{\partial x_B}{\partial x_j} = -y_j \implies \frac{\partial x_{B_i}}{\partial x_j} = -y_{ij} \quad \forall i \in R \quad (3.33)$$

c) Também a seguinte relação é válida:

$$y_j = B^{-1}a_j \implies B y_j = a_j \implies a_j = \sum_{i=1}^m a_{B_i} y_{ij} = \sum_{i=1}^m y_{ij} a_{B_i} \quad (3.34)$$

que indica que a_j é uma combinação linear das colunas de B e os y_{ij} permitem essa combinação linear.

d) De (3.30) temos o seguinte:

$$\frac{\partial z(x)}{\partial b} = c_B B^{-1} = w \implies \frac{\partial z(x)}{\partial b_i} = w_i \quad (3.35)$$

onde os w_i são os multiplicadores simplex, isto é, as variáveis duais do problema dual como mostrado adiante.

e) De (3.31) temos o seguinte:

$$\frac{\partial x_B}{\partial b} = B^{-1} \implies \frac{\partial x_{B_i}}{\partial b_j} = b_{ij}^{-1} \quad (3.36)$$

onde b_{ij}^{-1} é o elemento ij da matriz B^{-1} .

- Quando o quadro inicial é formado por uma matriz identidade constituída pelas colunas das variáveis de folga e, portanto, com coeficientes de custos iguais a zero, isto é, se o quadro inicial tem uma base $B = I$ e $c_B = 0$, então os valores de w se encontram disponíveis diretamente no quadro simplex, assim como, em todos os quadros simplex gerados posteriormente. Essas variáveis se encontram na linha zero e abaixo das variáveis básicas originais. Esta importante propriedade pode ser facilmente verificada.

Supor que a base inicial é $B_o = I$ e que $c_{B_o} = [0, \dots, 0]$. Nesse contexto, supor que em um quadro posterior, identificada pela base B , pretendemos encontrar os coeficientes de custo relativo correspondentes às variáveis básicas originais (do quadro inicial). Assim temos:

$$\bar{c}_{B_o} = c_B B^{-1} N_o - c_{B_o} = c_B B^{-1} I - 0 = c_B B^{-1} = w$$

Deve-se observar, novamente, que esse comportamento acontece quando o problema original está na forma $Ax \leq b$ e após padronização resolvemos o problema na forma $Ax + Ix_I = b$. Em outro caso, o vetor w pode ser sempre encontrada usando a relação genérica $w = c_B B^{-1}$.

- A matriz B^{-1} pode estar disponível em qualquer quadro simplex identificado com a base B . Esse caso acontece se a matriz base inicial B_o usada para montar o quadro simplex inicial é $B_o = I$. Nesse contexto, em qualquer quadro simplex posterior identificada pela base B , a inversa B^{-1} se encontra nesse quadro e abaixo das colunas básicas do quadro simplex original. Para provar essa característica importante, supor que a matriz A do problema de programação linear tem a seguinte estrutura:

$$A = [I \quad N]$$

Agora supor que temos o quadro simplex que representa uma base definida por B . Esse quadro na verdade é encontrado multiplicando a matriz A por B^{-1} . Portanto, esse quadro tem a seguinte forma:

$$A = [I \quad N] \implies B^{-1}[I \quad N] \implies [B^{-1} \quad B^{-1}N]$$

Portanto, B^{-1} se encontra no quadro corrente identificada pela base B e abaixo da matriz identidade no quadro inicial. Veja que a propriedade é mais geral e não precisa que a base inicial seja formada por uma matriz identidade. Na verdade precisa apenas que na matriz A exista uma submatriz que seja a identidade. Nesse caso, B^{-1} sempre está disponível em qualquer quadro simplex e abaixo da matriz I no quadro simplex inicial.

Exemplo 3.19: Encontrar os valores das relações matemáticas mostradas nas observações importantes para o quadro simplex ótimo do Exemplo 3.18.

Do quadro ótimo mostrado na Figura 3.3 temos os seguintes:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Com essas informações e com o quadro ótimo do Exemplo 3.18 encontramos as seguintes relações:

1. Variação da função objetivo em relação a uma variável não básica. De (3.32) temos o seguinte:

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x_3} = 0 \quad \frac{\partial z(x)}{\partial x_4} = 1$$

2. Variação da variável básica em relação a uma variável não básica. De (3.33) temos o seguinte:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_3} = 2 \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_4} = -1$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_3} = 1 \quad \frac{\partial x_2}{\partial x_4} = -1$$

3. Variação da função objetivo em relação ao vetor b . De (3.35) temos o seguinte:

$$\frac{\partial z(x)}{\partial b_1} = 0 \quad \frac{\partial z(x)}{\partial b_2} = -1$$

4. Variação de uma variável básica em relação ao vetor b de recursos. De (3.36) temos o seguinte:

$$\frac{\partial x_1}{\partial b_1} = -2 \quad \frac{\partial x_1}{\partial b_2} = 1 \quad \frac{\partial x_2}{\partial b_1} = -1 \quad \frac{\partial x_2}{\partial b_2} = 1$$