

Capítulo 1

Modelagem Matemática de Problemas de Programação Linear

1.1. Introdução

Neste Capítulo analisamos brevemente a estratégia usada para encontrar a modelagem matemática de um problema de programação linear (PL). Na verdade, deve-se observar que a estratégia para encontrar o modelo matemático de um problema de PL é a mesma usada para encontrar o modelo matemático de qualquer problema formulado de forma geral usando uma linguagem específica e que deve ser transformado em um modelo matemático de caráter universal. Após formular o modelo matemático, deve-se identificar o tipo de modelo matemático encontrado e identificar a técnica que devemos usar para resolver esse modelo matemático. Finalmente, deve-se verificar a coerência dos resultados encontrados com a modelagem matemática usada e da técnica de solução usada com os resultados encontrados.

As estratégias para encontrar o modelo matemático de um certo problema é um tópico pouco explorado na engenharia em geral e na engenharia elétrica em particular. Entretanto, devemos observar que quase todos os problemas que aparecem nas disciplinas de matemática, física e engenharia são problemas que devem ser resolvidos usando três passos claramente definidos: (1) encontrar a modelagem matemática e identificar o tipo de modelo matemático encontrado, (2) escolher a técnica de solução mais adequada e usar essa técnica para resolver o modelo matemático encontrado e, (3) resolver o modelo matemático encontrado e verificar a coerência dos resultados encontrados. Infelizmente, essa não é a forma apresentada, na maioria dos livros textos, para resolver a grande maioria dos problemas da matemática, da física e da engenharia.

De forma panorâmica, pode-se afirmar que um problema de engenharia gera dois tipos de modelos matemáticos: (1) um modelo que corresponde a um sistema de equações e/ou inequações algébricas e, (2) um modelo que corresponde a um sistema de equações diferenciais, que pode ter adicionalmente relações algébricas, mas que no conjunto representa um sistema de equações diferenciais e esse tipo de modelo não é abordado neste livro. Os modelos matemáticos que representam sistemas algébricos podem ser de dois tipos: problemas algébricos lineares e problemas algébricos não lineares.

Os problemas algébricos lineares representam os tópicos de interesse neste livro. Na resolução de problemas algébricos lineares podem aparecer três tipos de solução: (1) o problema algébrico linear não apresenta solução, isto é, estamos pretendendo resolver um sistema algébrico linear inconsistente. Na prática, isto é, no mundo da engenharia, esse tipo de problema aparece apenas quando formulamos modelos matemáticos conceitualmente errados; (2) o problema algébrico linear apresenta uma solução única. Na prática, isso acontece com a grande maioria de problemas que resolvemos a nível de graduação nos tópicos de matemática, física e engenharia; e (3) o problema algébrico linear apresenta muitas soluções. Nesse caso, estamos tratando com problemas relacionados com a otimização linear de problemas algébricos e representa o tópico de interesse fundamental deste livro. Neste último caso, o problema pode exigir que a solução seja inteira, isto é, as grandezas relacionadas com o problema a resolver sejam não divisíveis. Nesse caso, estamos pretendendo resolver um problema de programação linear inteira e esse tópico, que é muito mais complexo, é abordado em outros livros. A mesma lógica de raciocínio e de separação de tipos de problemas acontece com problemas com modelos matemáticos representados por um sistema algébrico não linear. Esse tipo de problemas também está fora do escopo deste livro.

Também, deve-se observar que a maioria dos problemas que aparecem nos livros textos a nível de graduação na matemática básica, na física básica e nas engenharias são problemas cujos modelos matemáticos são sistemas algébricos lineares de solução única. Assim, na resolução desses problemas deveríamos usar uma estratégia universal representada pelos seguintes passos: (1) montar o modelo matemático do problema (na maioria dos casos são sistemas algébricos lineares de solução única); (2) identificar a técnica de solução a ser usada (na maioria dos casos é um sistema algébrico linear de solução única) e, (3) verificar a consistência dos resultados encontrados.

Adicionalmente, deve-se observar que o tipo de modelo matemático (algébrico linear ou não linear, diferencial, etc.) depende do enunciado original do problema. Em outras palavras, a forma como é enunciado originalmente o problema é que define o modelo matemático a ser montado. Assim, a montagem de um modelo matemático representa apenas a transformação em linguagem matemática de um problema que foi enunciado usando uma linguagem de tipo mais geral. Assim, todos os problemas abordados neste Capítulo são problemas que geram modelos matemáticos que são problemas algébricos lineares. Nesse caso, a estratégia geral é mostrada na Figura 1.1 em que um problema enunciado em uma linguagem geral é transformado em um problema algébrico linear que representa um problema de programação linear.

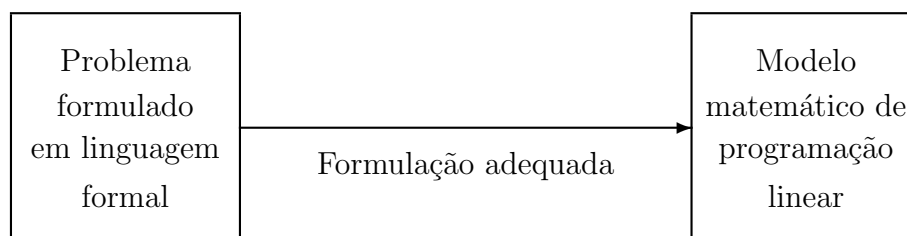


Figura 1.1: Formulação de um problema de programação linear.

Finalmente, deve-se observar que nem todos os problemas enunciados usando uma lin-

guagem de caráter geral podem ser representáveis através de modelos matemáticos tradicionais. Na literatura especializada existem problemas para os quais não se conhecem modelos matemáticos e, em muitos desses problemas, na verdade não se sabe se existem modelos matemáticos para esses problemas ou não existem esses modelos. Assim, pode-se afirmar que, em muitos casos específicos, a tarefa de encontrar um modelo matemático para um problema específico pode ser muito complexa. Neste ponto, é muito pertinente a pergunta sobre como resolveríamos um problema cujo modelo matemático não existe ou não se conhece. Para a otimização clássica, que é o tema deste livro, a resposta é que esse tipo de problema não pode ser resolvido usando técnicas tradicionais de otimização. Entretanto, existem muitos problemas da engenharia com essa característica e que devemos resolver de alguma forma. Assim, para contornar esse problema, os engenheiros que trabalham em otimização de problemas aplicados a engenharia usam as heurísticas e as meta-heurísticas como técnicas de otimização. A estratégia usada pelas heurísticas e as meta-heurísticas para resolver um problema cujo modelo matemático não existe ou não se conhece representa a justificativa principal para que um engenheiro de otimização domine os tópicos relacionados com às heurísticas e meta-heurísticas. Esses tópicos não são abordados neste livro.

1.2. Modelagem Matemática de um Problema de Programação Linear

Obviamente, não existe uma estratégia universal para encontrar, de forma mais eficiente, o modelo matemático de um problema de programação linear. Assim, podemos afirmar que a experiência é fundamental para descobrir a estratégia mais eficiente para montar o modelo matemático de um problema de programação linear. Entretanto, uma estratégia que pode ser útil na montagem do modelo matemático de um problema de programação linear e na resolução desse problema é a seguinte:

Passo 1 Escolha adequadamente as variáveis de decisão do problema:

Essas variáveis de decisão podem ter apenas um subíndice ou vários subíndices tais como x_i , x_{ij} , x_{ijk} , etc.

Passo 2 Usando as variáveis de decisão e os dados do problema, escreva a função objetivo e as restrições do problema de programação linear.

Passo 3 Resolva o problema de programação linear e verifique a coerência dos resultados encontrados.

Deve-se observar que a parcela mais crítica na montagem do modelo matemático de um problema de programação linear, assim como na montagem de qualquer modelo matemático, é a escolha adequada das variáveis de decisão. Entretanto, essa escolha eficiente depende mais da experiência em modelagem matemática. Assim, existe apenas uma sugestão na escolha dessas variáveis de decisão: geralmente existe uma variável de decisão relacionada com cada atividade do problema. Entretanto, essa sugestão não tem caráter geral. Portanto, pode ser necessário escolher variáveis de decisão que não aparecem evidentes no enunciado do

problema. A seguir, mostramos os exemplos mais conhecidos em modelagem matemática de problemas de programação linear.

Exemplo 1.1: O problema de fabricação de fertilizantes

O problema de fabricação de fertilizantes é um dos mais conhecidos na literatura de programação linear. Também é um tipo de problema em que a programação linear foi usada com sucesso na prática de fabricação de fertilizantes. Uma forma particular desse problema assume a forma mostrada adiante.

Uma empresa fabrica 2 tipos de fertilizantes, chamados de fertilizantes tipos A e B e, nesse processo de fabricação, são usados 3 tipos de matéria prima de acordo com os dados apresentados na Tabela 1.1. Pretende-se montar o modelo matemático desse problema de forma que o dono da fábrica de fertilizantes obtenha o lucro máximo.

Tabela 1.1: Dados do problema de fabricação de fertilizantes.

Matéria prima	Toneladas de matéria prima necessárias para preparar uma tonelada de fertilizante tipo A	Toneladas de matéria prima necessárias para preparar uma tonelada de fertilizante tipo B	Quantidade máxima de matéria prima disponível por mês (Toneladas)
1	2	1	1500
2	1	1	1200
3	1	0	500
Lucro líquido por tonelada fabricada \$	15	10	

Trata-se de um problema de maximização. Assim, montamos o modelo matemático desse problema usando a estratégia básica da seguinte forma:

Passo 1 Sejam as variáveis de decisão as seguintes:

x_1 representa as toneladas de fertilizante tipo A fabricadas.

x_2 representa as toneladas de fertilizante tipo B fabricadas.

Passo 2 A modelagem matemática assume a seguinte forma:

$$PL \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \max \quad z(x) = 15x_1 + 10x_2 \\ s.a. \\ 2x_1 + x_2 \leq 1500 \\ x_1 + x_2 \leq 1200 \\ x_1 \leq 500 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Passo 3 Resolver o modelo matemático:

Usando técnicas de solução de problemas de PL, mostradas adiante, pode-se encontrar a solução ótima desse problema que assume a seguinte forma:

$$x_1 = 300 \qquad x_2 = 900 \qquad z(x) = 13500$$

A solução gráfica desse problema, cuja forma de obtenção é mostrada adiante, é mostrada na Figura 1.2.

Observações importantes: Na formulação do modelo matemático do Exemplo 1.1 foram consideradas, de forma implícita ou explícita, as seguintes hipóteses:

1. **Propriedade de aditividade:** A chamada propriedade de aditividade está presente na modelagem matemática dos problemas de programação linear. Assim, por exemplo, 2 toneladas de matéria prima tipo 1 produz 1 tonelada de fertilizante tipo A e 1 tonelada do mesmo material produz uma tonelada de fertilizante tipo B e, portanto, $2x_1 + x_2$ toneladas de matéria prima tipo 1 são necessárias para produzir x_1 toneladas de fertilizantes tipo A e x_2 toneladas de fertilizantes tipo B. A propriedade de aditividade também gera uma função objetivo separável nas variáveis x_j . A propriedade de aditividade implica que o consumo total é igual à soma dos consumos parciais. A propriedade de aditividade gera relações lineares e, portanto, faz parte dos modelos matemáticos lineares.
2. **Propriedade de proporcionalidade:** A chamada propriedade de proporcionalidade também está presente na modelagem matemática dos problemas de programação linear. Assim, por exemplo, se são necessárias 2 toneladas de matéria prima tipo 1 para preparar 1 tonelada de fertilizante tipo A, então a propriedade de proporcionalidade implica que são necessárias $2x_1$ toneladas de matéria prima tipo 1 para preparar x_1 toneladas de fertilizante tipo A. Também, se \$15 é o lucro para uma tonelada de fertilizante tipo A produzido, então x_1 toneladas produzidas de fertilizante tipo A geram um lucro de $15x_1$. A propriedade de proporcionalidade também gera relações lineares e, portanto, faz parte dos modelos matemáticos lineares.
3. **Restrições de não negatividade:** As variáveis x_1, x_2 , etc. são não negativas já que elas representam grandezas não negativas (toneladas de fertilizantes). Logo, os modelos iniciais de problemas de programação linear aparecem com a declaração de que as variáveis devem ser não negativas. Por esse motivo, os chamados problemas de programação linear padrão devem ter todas as variáveis de decisão como sendo não negativas, isto é, $x_j \geq 0$. Entretanto, existem problemas de programação linear que possuem variáveis de decisão que não são não negativas. Nesse caso, esse problema se resolve de duas formas: (1) preservando a forma padrão, uma variável de decisão que pode assumir qualquer valor pode ser substituído por duas variáveis de decisão não negativas, como analisado no Capítulo 3 e, (2) no Capítulo 9 é desenvolvido o chamado método primal simplex canalizado que permite resolver problemas em que as variáveis de decisão não precisam ser não negativas e podem apresentar a forma $l_j \leq x_j \leq u_j$, em que l_j e u_j representam o limite inferior e superior de uma variável de decisão x_j e esses valores podem assumir valores de qualquer valor, inclusive $-\infty$ e ∞ .

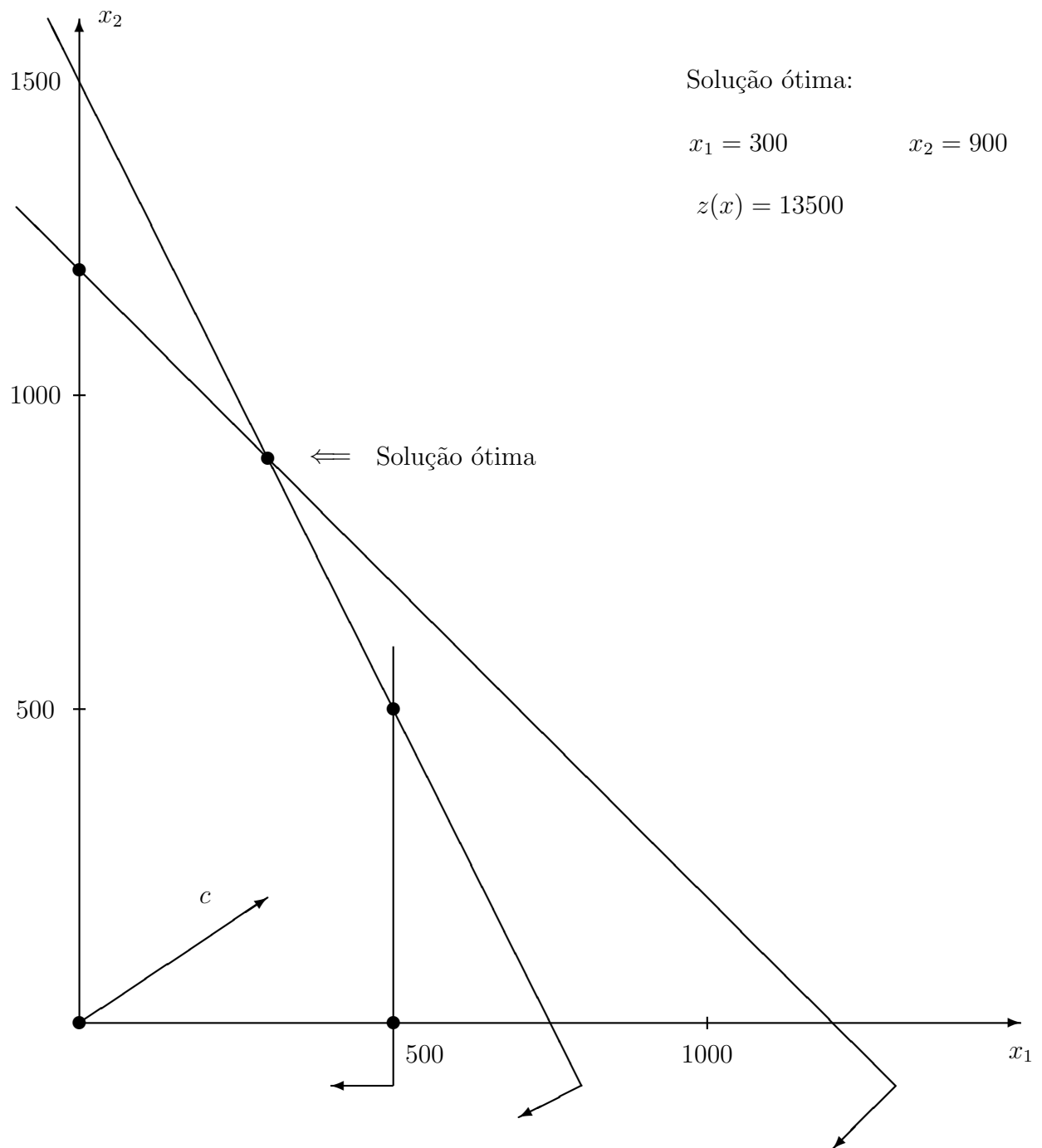


Figura 1.2: Representação gráfica do problema de fabricação de fertilizantes.

4. **Variação contínua das variáveis de decisão:** No exemplo, foi assumido que as variáveis de decisão podem assumir qualquer valor real não negativo. Essa suposição é válida no problema de fabricação de fertilizantes e em muitos problemas de interesse prático. Essa suposição é obrigatória para que o modelo matemático seja chamado de programação linear. Assim, essa suposição aparece de forma implícita ou explícita nos problemas deste capítulo. Entretanto, existem muitos problemas de interesse prático em que todas ou uma parcela das variáveis de decisão devem assumir apenas valores inteiros. Esse tipo de problemas geram modelos matemáticos chamados de programação linear inteira ou de programação linear inteira mista. Esse tipo de problemas são muito mais difíceis de resolver e não fazem parte do escopo deste livro.

Exemplo 1.2: O problema da dieta

O problema de elaboração de dieta é também um dos mais conhecidos na literatura de programação linear. Esse tipo de problema de programação linear foi muito usado com sucesso na prática de fabricação de dieta para animais. Uma forma particular desse problema assume a forma mostrada adiante.

Existem dois tipos de grãos para elaborar uma dieta adequada a um custo mínimo. Assim, a dieta deve ser elaborada de forma que atenda a um requerimento mínimo de nutrientes, então o conteúdo de nutriente na dieta deve ser maior ou igual a um requerimento mínimo diário (RMD). A Tabela 1.2 mostra os 3 tipos de nutrientes que devem constar na dieta e a disponibilidade desses nutrientes nos dois tipos de grãos, assim como o custo da matéria prima. Assim, pretende-se encontrar o modelo matemático que permita encontrar a composição da dieta a um custo mínimo.

Tabela 1.2: Dados do problema de elaboração da dieta.

Nutriente	Unidades de nutriente por Kg. de grão de tipo 1	Unidades de nutriente por Kg. de grão de tipo 2	RMD de unidades de nutriente
Amido	5	10	8
Proteína	4	2	15
Vitamina	2	1	3
Custo (\$/Kg)	0,60	0,40	

Trata-se de um problema de minimização. Assim, montamos o modelo matemático desse problema, usando a estratégia básica, da seguinte forma:

Passo 1 Sejam as variáveis de decisão as seguintes:

x_1 representa os Kg. de grão tipo 1 usados na dieta.

x_2 representa os Kg. de grão tipo 2 usados na dieta.

Passo 2 A modelagem matemática assume a seguinte forma:

$$PL \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min \quad z(x) = 0,60x_1 + 0,40x_2 \\ \text{s.a.} \\ 5x_1 + 10x_2 \geq 8 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 15 \\ 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Passo 3 Resolver o modelo matemático:

Usando técnicas de solução de problemas de PL, mostradas adiante, pode-se encontrar a solução ótima desse problema que assume a seguinte forma:

$$x_1 = \frac{15}{4} \qquad x_2 = 0 \qquad z(x) = \frac{9}{4}$$

A solução gráfica desse problema, cuja forma de obtenção é mostrada adiante, é mostrada na Figura 1.3.

Exemplo 1.3: O problema de transportes

O problema de transportes é muito importante em aplicações práticas e também é um dos mais conhecidos na literatura de programação linear. Esse tipo de problema de programação linear aparece como um subproblema em muitos problemas relacionados com logística e transporte. No problema de transportes existe um conjunto de nós (fábricas) onde existem produtos que devem ser transportados para os nós de destino (depósitos). Nesse contexto, deve ser especificada a quantidade de produto disponível em cada ponto de origem e a quantidade de produto requerido em cada ponto de destino, assim como os custos de transporte de cada unidade de produto. O problema consiste em determinar a quantidade de produto que deve ser transportado de cada ponto de origem a cada ponto de destino com o mínimo de custo total de transporte. A Figura 1.4 mostra um diagrama esquemático desse tipo de problema. Uma forma particular desse problema assume a forma mostrada adiante.

No problema de transportes apresentado os pontos de origem são duas minas, o produto a ser transportado é minério ferroso e o destino está representado por três siderúrgicas de fabricação de aço que precisam de minério ferroso para a fabricação do aço. Os dados adicionais do problema são mostrados na Tabela 1.3.

Assim, pretende-se encontrar o modelo matemático que permite encontrar a forma de transporte ótimo dos produtos, isto é, a um custo mínimo. A Figura 1.5 mostra o diagrama esquemático desse problema.

Trata-se de um problema de minimização. Assim, montamos o modelo matemático desse problema, usando a estratégia básica, da seguinte forma:

Passo 1 Sejam as variáveis de decisão as seguintes:

x_{ij} representa as toneladas de minério transportadas da mina i para a siderúrgica j , isto é, $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

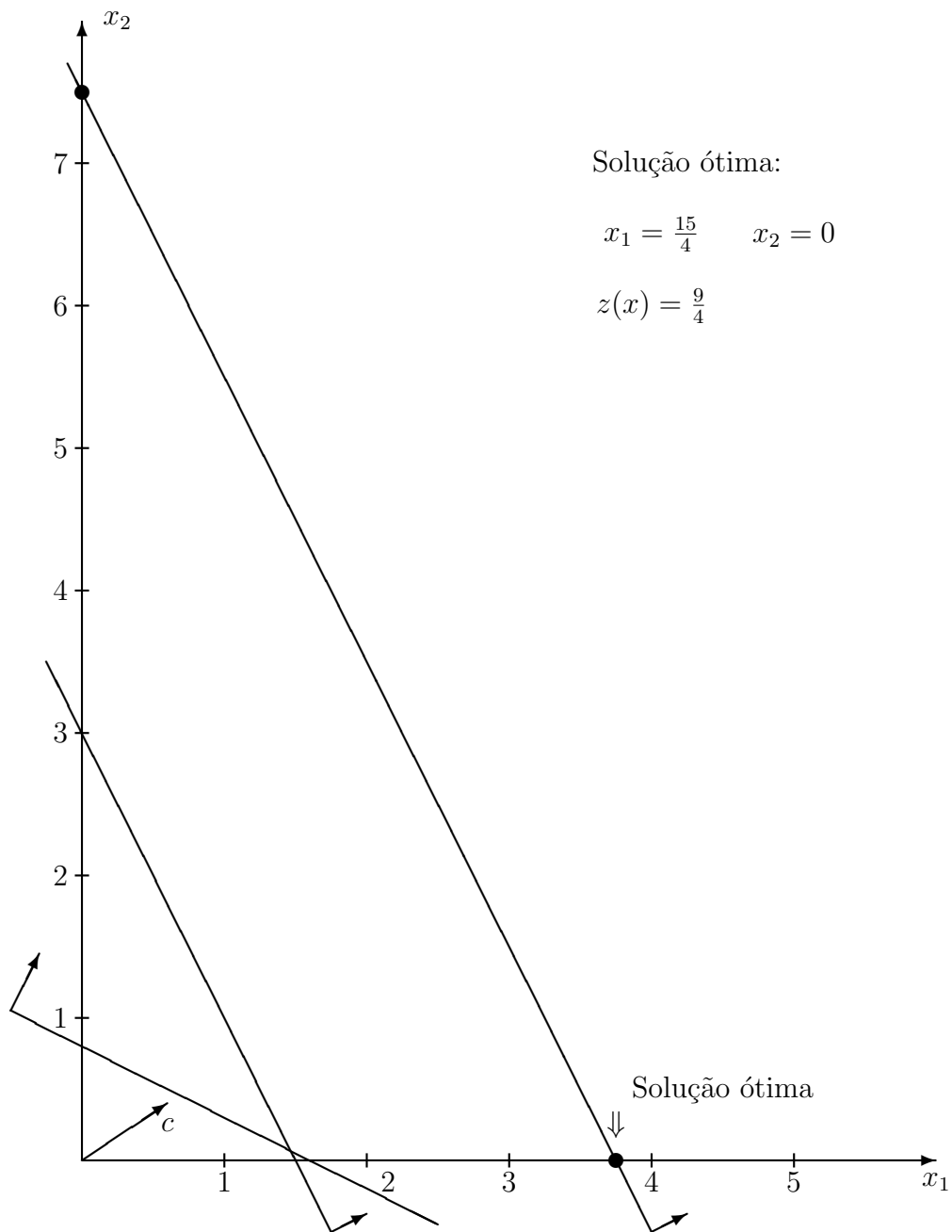


Figura 1.3: Representação gráfica do problema da dieta.

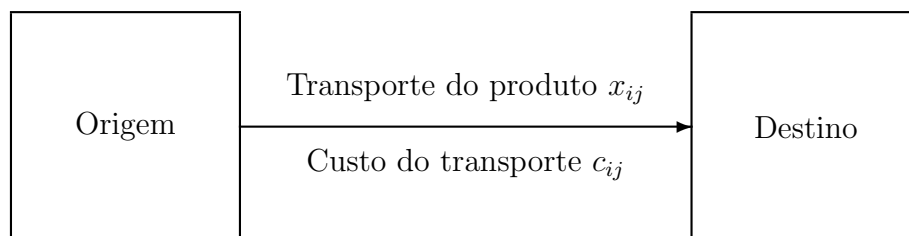


Figura 1.4: O problema de transportes.

Tabela 1.3: Dados do problema de transportes.

	Custo unitário de transporte do minério da mina para a siderúrgica em centavos por tonelada			Quantidade de minério disponível na mina (toneladas)
Mina	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	
Mina 1	9	16	28	103
Mina 2	14	29	19	197
Toneladas de minério necessárias em cada siderúrgica	71	133	96	

Passo 2 A modelagem matemática assume a seguinte forma:

$$PL \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min \ z(x) = 9x_{11} + 16x_{12} + 28x_{13} + 14x_{21} + 29x_{22} + 19x_{23} \\ s.a. \\ \begin{array}{rcl} x_{11} + x_{12} + x_{13} & & \leq 103 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} & \leq 197 \\ x_{11} & + x_{21} & \geq 71 \\ & x_{12} & + x_{22} & \geq 133 \\ & & x_{13} & + x_{23} & \geq 96 \\ x_{ij} \geq 0 & \forall i = 1, 2; j = 1, 2, 3 \end{array} \end{array} \right.$$

Passo 3 Resolver o modelo matemático:

Usando técnicas de solução de problemas de PL, mostradas adiante, pode-se encontrar a solução ótima desse problema que assume a seguinte forma:

$$x_{12} = 103 \quad x_{21} = 71 \quad x_{22} = 30 \quad x_{23} = 96 \quad x_{11} = x_{13} = 0 \implies z(x) = 5336$$

A solução desse problema é mostrada na Figura 1.6.

Observações importantes: As seguintes observações, relacionadas com o problema de transportes, são importantes:

- O problema de transportes apresenta uma estrutura muito especial. Assim, o exemplo apresentado pode ser representado usando o arranjo matricial da Tabela 1.6.

Dessa forma, cada x_{ij} representa a quantidade transportada da origem i para o destino j . No mesmo quadro aparece o custo de transporte de uma unidade de produto. As restrições do ponto de origem aparecem na horizontal e as restrições de destino aparecem na vertical. Assim, a função objetivo é a soma dos produtos de cada quadrícula. Qualquer problema de PL que pode ser representado no arranjo mostrado anteriormente é chamado de problema de transportes.

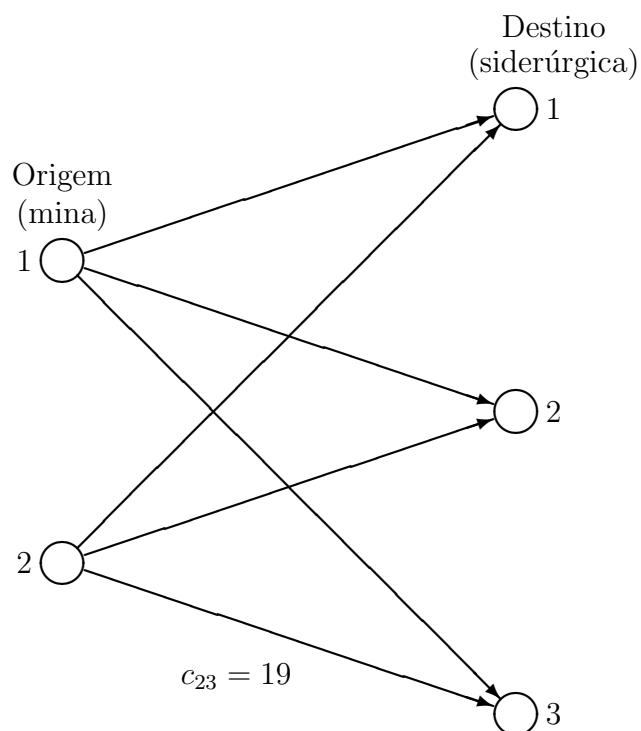


Figura 1.5: Figura esquemática do problema de transportes.

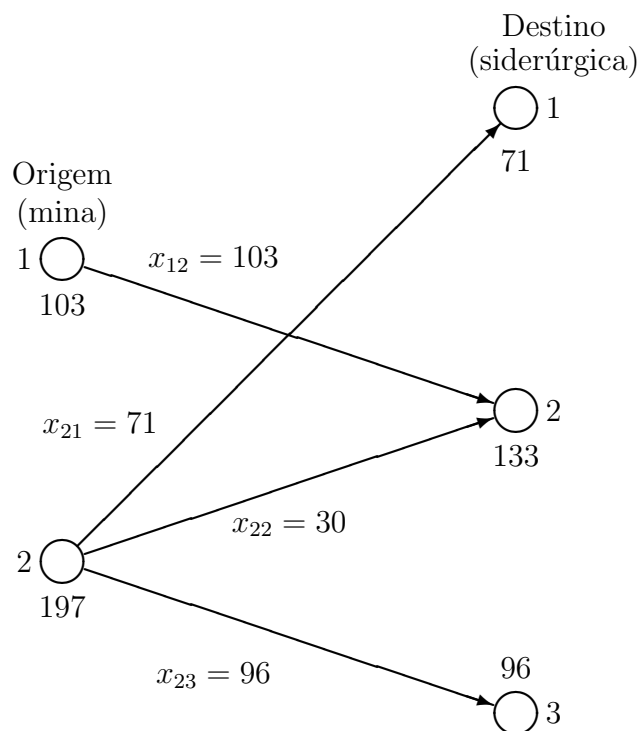


Figura 1.6: Solução do problema de transportes.

Tabela 1.4: Estrutura do problema de transportes.

	Siderúrgica (destino)			
	1	2	3	
Mina 1	x_{11} 9	x_{12} 16	x_{13} 28	≤ 103
Mina 2	x_{21} 14	x_{22} 29	x_{23} 19	≤ 197
	≥ 71	≥ 133	≥ 96	
	$x_{ij} \geq 0; \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3$			Minimizar custo

- Se as restrições do modelo matemático do problema de transportes for arranjada na forma $Ax = b$, então a matriz A correspondente tem uma estrutura muito especial. Em cada coluna dessa matriz existe apenas dois elementos com valor unitário e todos os outros elementos tem valores iguais a zero. Assim, a matriz A apresenta apenas três tipos de valores, isto é, 1, -1 e 0 (o negativo pode aparecer quando algumas restrições são multiplicadas por -1 ou quando transformamos as relações de desigualdade em relações de igualdade inventando as variáveis de folga, como é analisada adiante). Essa característica faz com que o problema de transportes assuma uma forma muito especial e, adicionalmente, pode-se desenvolver métodos muito especializados para resolver esse tipo de problema. Assim, existe um método especializado para resolver esse tipo de problema chamado de método de fluxo em redes para resolver problemas de programação linear. Veja também que a solução gráfica mostrada na Figura 1.6 representa uma figura conexa e sem laços. Esse tipo de figura é chamada de árvore geradora na teoria básica de grafos, usada para desenvolver o método de fluxo em redes para problemas de transporte.
- Se todos os parâmetros que definem os recursos disponíveis e os recursos necessários no problema assumem valores inteiros positivos e se o problema tiver pelo menos uma solução factível, então esse problema tem uma solução ótima em que todos os x_{ij} são inteiros. Essa característica decorre da propriedade da matriz A mencionada anteriormente. Entretanto, se o problema tiver soluções ótimas alternativas então a propriedade garante que deve existir pelo menos uma solução ótima alternativa inteira e, obviamente, podem existir soluções ótimas alternativas não inteiras. Finalmente, observe-se que a solução encontrada para o Exemplo 1.3 é inteira, sendo que essa exigência não se encontra explícita no modelo matemático.

Exemplo 1.4: O problema de atribuição

O problema de atribuição também é um tipo clássico de problema de programação linear. Esse tipo de problema aparece sempre que se pretende distribuir de maneira eficiente um grupo de tarefas para um grupo de trabalhadores. Entretanto, em casos especiais, os problemas de transporte também podem assumir a forma de um problema de atribuição. Apresenta-se um caso particular desse problema.

Considere um clube de sociólogos formados por 5 homens e 5 mulheres em que cada um deles conhece muito bem os outros membros do clube. Pretende-se quantificar a felicidade encontrada quando um homem passa uma parcela de seu tempo disponível com uma mulher do clube. Nesse contexto, pretende-se quantificar a máxima felicidade dos membros do grupo formulando e resolvendo um problema de programação linear. Os dados adicionais referentes ao grau de felicidade de cada casal são mostrados na Tabela 1.5.

Tabela 1.5: Dados do problema de atribuição.

Socióloga	Sociólogo				
	1	2	3	4	5
1	78	-16	19	25	83
2	99	98	87	16	92
3	86	19	39	88	17
4	-20	99	88	79	65
5	67	98	90	48	60

Assim, pretende-se encontrar o modelo matemático que permita maximizar a felicidade dos sociólogos.

Trata-se de um problema de maximização. Nesse contexto, pretende-se determinar quanto tempo cada homem deve passar com cada mulher na tentativa de maximizar a felicidade da turma. Assim, montamos o modelo matemático desse problema, usando a estratégia básica, da seguinte forma:

Passo 1 Sejam as variáveis de decisão as seguintes:

x_{ij} representa a fração do tempo total que o homem i e a mulher j disponibilizam para ficar juntos, isto é, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ e $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Nesse contexto, a soma das frações de tempo de um indivíduo deve ser igual ao tempo total que, por comodidade, assumimos que é igual a 1.

De acordo com a lógica de escolha das variáveis de decisão e da forma de considerar o tempo total disponível, deve-se observar que a restrição mais importante do problema é que a soma das frações de tempo de cada indivíduo deve ser igual a 1. Assim, por exemplo, a restrição de disponibilidade do homem 1 assume a seguinte forma:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$$

Também, a restrição relacionada com a mulher 1 assume a seguinte forma:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1$$

Portanto, existe uma restrição de disponibilidade de tempo para cada sociólogo e para cada socióloga, totalizando 10 restrições. As outras restrições são as triviais de não negatividade.

Passo 2 A modelagem matemática do problema de atribuição:

O modelo matemático desse problema assume uma estrutura muito grande. Assim, a função objetivo apresenta 25 termos. Entretanto, como se trata de um problema com a mesma estrutura do problema de transportes, então mostramos o modelo matemático na forma de arranjo matricial. Assim, o modelo matemático assume a forma mostrada na Tabela 1.6.

Tabela 1.6: Estrutura do problema de atribuição.

Socióloga	Sociólogo					
	1	2	3	4	5	
1	x_{11} 78	x_{12} -16	x_{13} 19	x_{14} 25	x_{15} 83	= 1
2	x_{21} 99	x_{22} 98	x_{23} 87	x_{24} 16	x_{25} 92	= 1
3	x_{31} 86	x_{32} 19	x_{33} 39	x_{34} 88	x_{35} 17	= 1
4	x_{41} -20	x_{42} 99	x_{43} 88	x_{44} 79	x_{45} 65	= 1
5	x_{51} 67	x_{52} 98	x_{53} 90	x_{54} 48	x_{55} 60	= 1
	= 1	= 1	= 1	= 1	= 1	
	$x_{ij} \geq 0; \quad i = 1, 2, 3, 4, 5; \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$					Maximizar felicidade

Passo 3 Resolver o modelo matemático:

Usando técnicas de solução de problemas de PL, mostradas adiante, pode-se encontrar a solução ótima desse problema que assume a seguinte forma:

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou representado de outra forma:

$$x_{15} = x_{21} = x_{34} = x_{42} = x_{53} = 1 \implies z(x) = 459$$

e todos os outros valores de $x_{ij} = 0$.

Observações importantes: As seguintes observações, relacionadas com o problema de atribuição, são importantes:

- O problema de atribuição apresenta uma estrutura muito especial. Assim, o exemplo foi representado usando o arranjo matricial da mesma forma que o problema de transportes. Deve-se observar ainda que o problema de transportes se transforma em um problema de atribuição quando o número de pontos de origem é igual ao número de pontos de destino e se, adicionalmente, existe apenas uma unidade de produto disponível em cada ponto de origem e em cada ponto de destino é requerido apenas uma unidade de produto.
- Como no problema de transportes, o problema de atribuição também assume uma estrutura muito especial. Assim, um problema de atribuição pode ser resolvido usando uma metodologia geral de programação linear (o método simplex tradicional), usando um método especializado de programação linear para problemas de transporte (o método de fluxo em redes para problemas de programação linear) ou desenvolvendo uma metodologia ainda mais especializada para problemas de atribuição (o método húngaro).
- A solução do problema de atribuição pode ser qualquer valor do intervalo $0 \leq x_{ij} \leq 1$. Entretanto, pela propriedade já observada para o problema de transportes, se existe solução factível para o problema de atribuição, então existe uma solução binária com todos os valores dos x_{ij} sendo iguais a 0 ou 1 (veja que os parâmetros do problema sempre podem assumir valores inteiros já que os dados do problema estão representados apenas pelos coeficientes da função objetivo, que mesmo sendo racionais podem ser transformados em inteiros).
- Para o exemplo mostrado, pode-se verificar que na resposta apresentada na forma de arranjo matricial aparece um valor unitário em cada linha e coluna do arranjo matricial. Essa propriedade da forma de solução do problema de atribuição é uma das características usadas para desenvolver o método húngaro para resolver problemas de atribuição.
- O problema de atribuição aparece em todo tipo de atividade em que se pretende distribuir tarefas para trabalhadores. No problema de atribuição tradicional, analisado neste livro, o número de trabalhadores e de tarefas deve ser o mesmo. Quando o número de tarefas é maior que o número de trabalhadores, então aparece o problema generalizado de atribuição. Esse tipo de problema é muito mais difícil de resolver e para isso devem ser usados técnicas de programação inteira de otimização.
- No exemplo apresentado, a solução ótima atribui a melhor alternativa para cada sociólogo ou socióloga, exceto o sociólogo No. 5 e a socióloga No. 5 que ficaram com a segunda opção. Esse tipo de solução é típico das técnicas de otimização em que se prioriza o benefício global em detrimento de benefícios particulares.

1.3. Método Gráfico de Solução de Problemas de Programação Linear

Problemas de programação linear com duas ou três variáveis de decisão podem ser resolvidos usando um método gráfico. Mostramos essa metodologia através do seguinte exemplo:

$$\begin{aligned} \min \quad & z(x) = -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad & g_1(x) = x_1 + x_2 \leq 6 \\ & g_2(x) = -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

No método gráfico devemos representar as restrições, cujas interseções definem a chamada região factível e a gradiente da função objetivo. Assim, o método gráfico assume a seguinte estrutura:

1. Representação da região factível:

Uma restrição de desigualdade, na verdade é um subespaço como mostrado adiante, pode ser representado usando o conceito de gradiente ou identificando um ponto factível dessa desigualdade. Inicialmente, deve-se representar o gráfico de reta ou o espaço existente na restrição de desigualdade, isto é, a reta $x_1 + x_2 = 6$ na primeira restrição do exemplo. Portanto, falta determinar a região factível determinada por essa restrição que deve ser para um lado ou para o outro lado da reta.

Consideremos a primeira restrição: $g_1(x) = x_1 + x_2 - 6 \leq 0$. A gradiente de $g_1(x)$ assume a seguinte forma:

$$\nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, como o vetor gradiente $(1, 1)$ indica a direção de máximo crescimento de $g_1(x)$ e como $g_1(x) \leq 0$, então a região factível dessa restrição deve ser em sentido contrário ao gradiente como se mostra na Figura 1.7.

Outra alternativa, muito simples, consiste em identificar um ponto que se encontre a um lado da reta que já foi representada no gráfico. Se esse ponto satisfaz a restrição, então a região representada por esse ponto identifica a região factível. Em caso contrário, a região factível se encontra do outro lado da reta. O ponto mais adequado a ser escolhido para teste é a própria origem que deve ser evitada apenas se a reta passa pela origem. No exemplo, escolhe-se o ponto $(2, 2)$. Assim, como $g_1(x) = (2) + (2) - 6 = -2 < 0$, então a região factível para $g_1(x)$ está na região do ponto $(2, 2)$ e limitada pela reta $x_1 + x_2 = 6$.

2. Representação da curva de nível da função objetivo:

Podemos representar uma curva de nível da função objetivo, geralmente aquela que passa pela origem. Depois, pode-se deslocar essa curva de nível, paralelamente, na direção de diminuição da função objetivo para o problema de minimização (e na direção de incremento da função objetivo para o problema de maximização) até encontrar o último ponto factível. Como deve ser provado adiante, esse último ponto factível é um vértice e mais adequadamente chamado de ponto extremo mais adiante.

O conceito de gradiente pode ser usado para determinar a direção de máxima variação da função objetivo. Assim, seja $z(x) = -x_1 - 3x_2 = c$ a função objetivo em que $c = (-1, -3)$ representam os coeficientes da função objetivo. Nesse contexto, temos o seguinte:

$$\nabla z(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial z(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} = c$$

Portanto, o vetor $c = (-1, -3)$ indica a direção de máximo incremento da função objetivo. No exemplo apresentado o problema é de minimização e, portanto, a direção de máxima diminuição é dado pelo vetor $-c = (1, 3)$

Exemplo 1.5: Resolver de forma gráfica o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min \quad & z(x) = -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad & \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

A solução gráfica desse problema é mostrada na Figura 1.7. A solução ótima é seguinte:

$$x_1 = \frac{4}{3} \quad x_2 = \frac{14}{3} \implies z(x) = -\frac{46}{3}$$

Adicionalmente, existem alguns conceitos muito importantes relacionados com a resolução de problemas de programação linear. Para analisar alguns desses conceitos vamos aceitar que se um problema de programação linear tem uma solução ótima finita, então um vértice (um ponto extremo) é uma solução ótima desse problema. Assim, analisando um ponto extremo poderíamos querer verificar se esse ponto extremo é solução ótima do problema. Para responder essa questão devemos observar que um ponto extremo não é ótimo se existe,

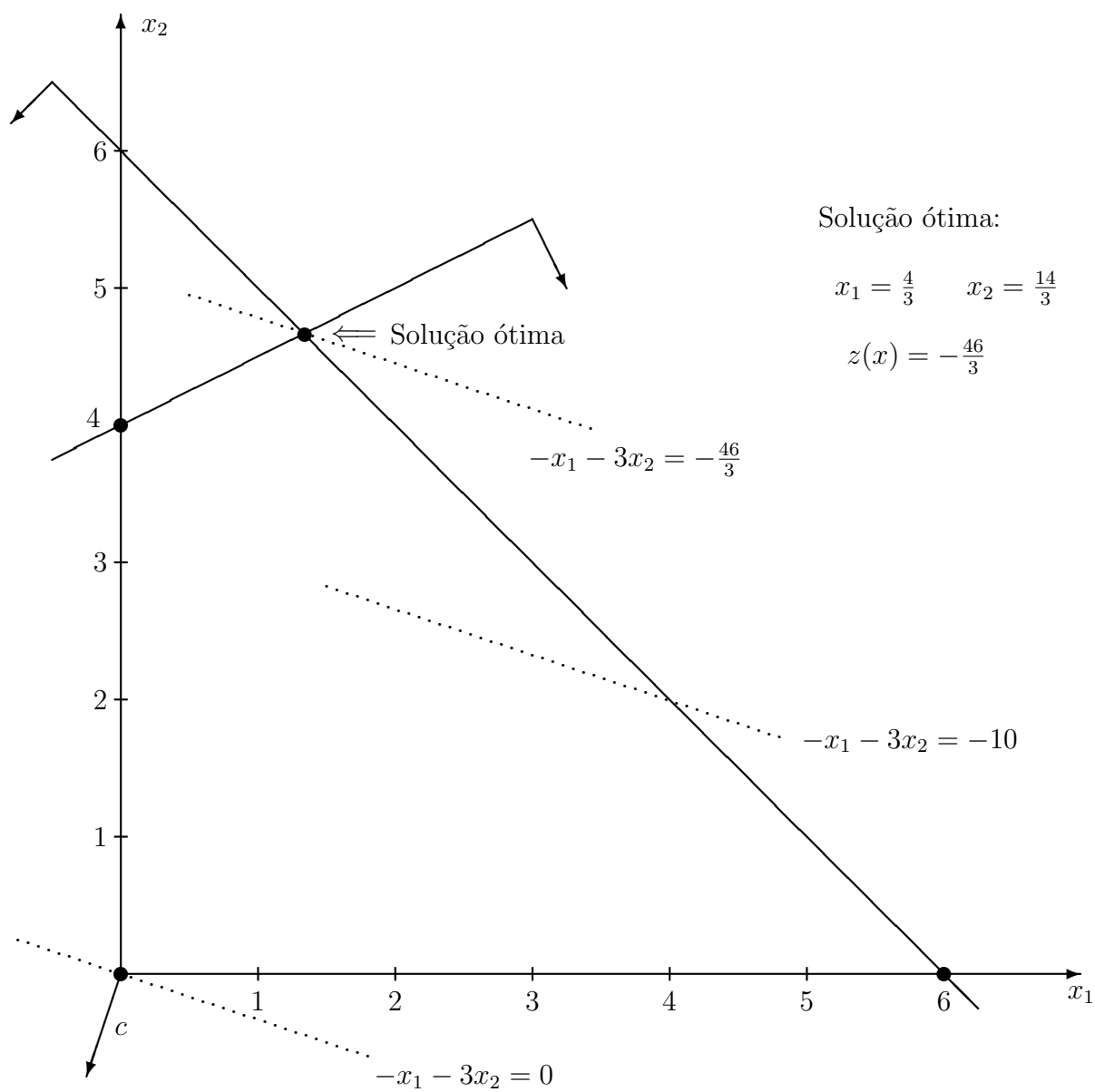


Figura 1.7: Solução gráfica de um problema de programação linear.

a partir desse ponto, uma direção que seja factível e de melhor qualidade. Assim, a partir de um ponto extremo, existe uma direção de otimização t se forem verdadeiras as seguintes premissas:

- Existe uma direção de melhor qualidade, isto é, existe uma direção em que a função objetivo melhora. Existe uma direção t desse tipo se esse vetor forma um ângulo menor ou igual a 90° com o vetor $-c$ para o problema de minimização.
- Existe uma direção factível. Assim, existe uma direção factível t se essa direção forma um ângulo maior ou igual a 90° com cada vetor normal p_i relacionado com a restrição ativa no ponto em análise. Uma restrição se encontra ativa se ela define o ponto extremo em análise. Deve-se observar que o vetor p_i na verdade é o gradiente da função $g_i(x)$ que define a restrição.
- Em resumo, se existe uma direção t que cumpre as duas exigências indicadas anteriormente, no ponto extremo em análise, então esse ponto extremo não é ótimo. Essa propriedade é muito importante e na verdade é uma aplicação do Teorema de Karush-Kuhn-Tucker para caracterizar um ponto extremo ótimo de um problema de programação linear que deve ser analisado adiante. Observe que essa propriedade é muito importante e significa que analisando um ponto extremo podemos concluir se ele é ótimo ou não é ótimo, sem analisar nem conhecer os outros pontos extremos.
- Para aproveitar a propriedade fundamental no método gráfico devemos proceder da seguinte forma: Identifique o cone formado por todos os vetores p_i relacionados com as restrições ativas no ponto extremo em análise. Se o vetor $-c$ pertence a esse cone, então o ponto extremo é ótimo. Na Figura 1.8 mostramos a análise dos quatro pontos extremos e, pode-se verificar facilmente que um ponto extremo é ótimo.
- Graficamente, pode-se verificar que um ponto extremo é ótimo de um problema de programação linear. Assim, no Capítulo 3, deve-se provar que se um problema de programação linear tem ótimo finito, então um ponto extremo deve ser ótimo do problema de programação linear. Mais importante ainda, se existe disponível a informação de um ponto extremo, então de uma forma relativamente trivial, pode-se responder se esse ponto extremo é ótimo ou não é ótimo (essa análise não exige conhecer os outros pontos extremos). Deve-se observar que esse tipo de análise foi feita na Figura 1.8 ao verificar se o vetor $-c$ está dentro do cone gerado pelos vetores normais aos hiperplanos ativos no ponto extremo em análise.

Finalmente, como acontece em qualquer problema de programação linear, o método gráfico pode identificar os seguintes tipos de soluções para um problema de programação linear:

1. **Existe solução factível:** Neste caso existe uma solução ótima $x_{otim} = (x_1, x_2)$ que identifica uma função objetivo ótima $z(x_{otim})$. Entretanto, neste caso, ainda existem 3 casos particulares:
 - a) Existe uma solução ótima finita e única. Assim, existe apenas uma solução ótima x_{otim} .

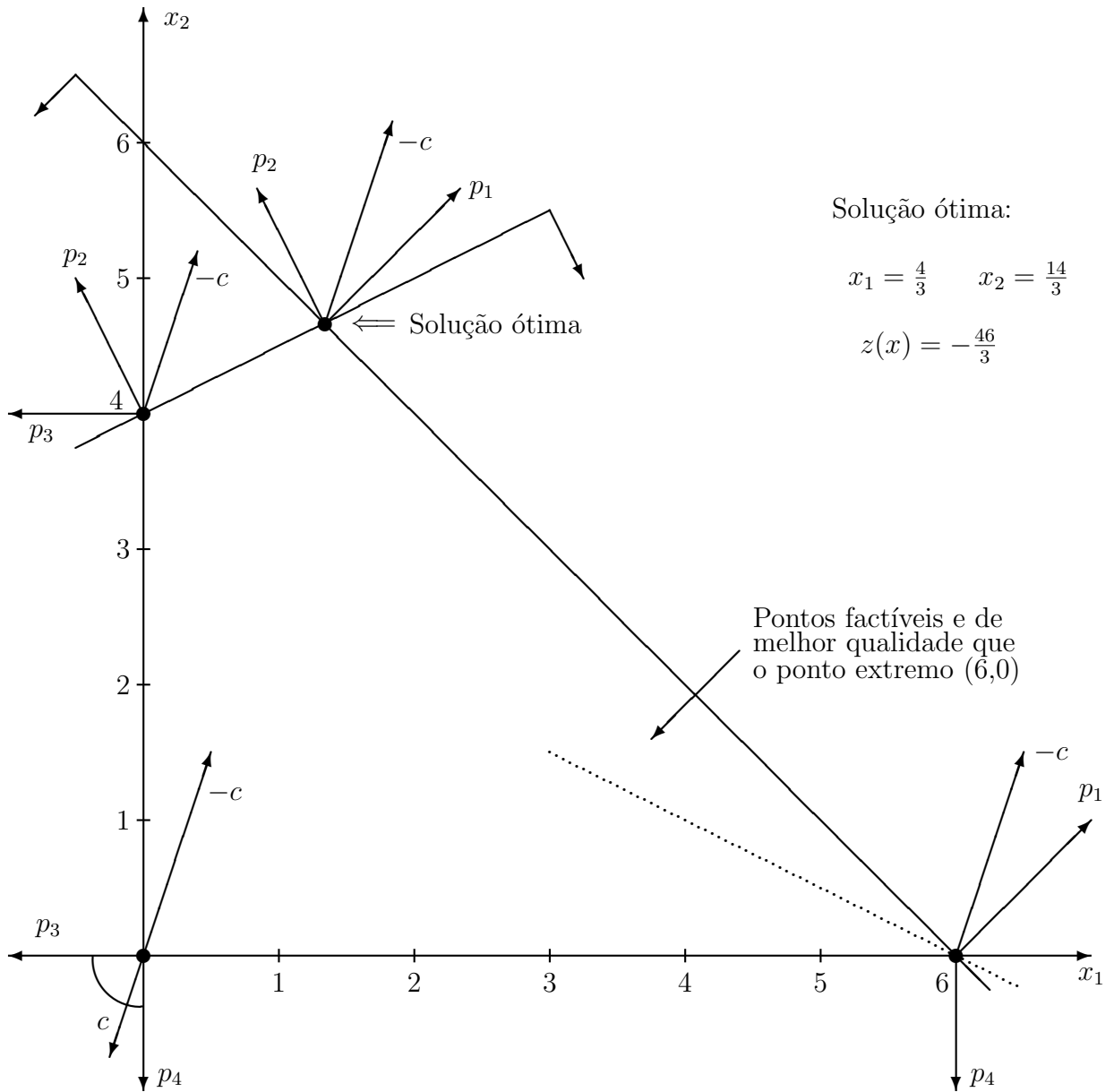


Figura 1.8: Análise de otimalidade dos pontos extremos.

- b) Existem soluções ótimas alternativas limitadas. Assim, no espaço E^2 existem dois pontos extremos ótimos e também todos os pontos que representam uma combinação convexa com esses pontos também são ótimos. Portanto, se x_1 e x_2 são dois pontos extremos ótimos, então o conjunto de pontos ótimos do PL está representado pela relação: $x_{otim} = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ para $\lambda \in [0, 1]$.
 - c) Existem soluções ótimas alternativas ilimitadas. Assim, no espaço E^2 existem um ponto extremo ótimo x_1 e uma direção extrema ótima d que identificam os elementos de um raio ótimo. Nesse contexto, o conjunto de pontos ótimos está representado pela relação: $x_{otim} = x_1 + \lambda d$ para $\lambda \geq 0$. Os conceitos de ponto extremo e de direções extremas são analisados em detalhe no próximo capítulo.
2. O problema de programação linear é infactível, isto é, não existe nenhum ponto factível.
 3. O problema de programação linear é ilimitado, portanto, $z(x) \implies \infty$. Neste caso, a função objetivo tende a infinito seguindo a direção de um raio extremo. Assim, a partir de um ponto extremo x_1 , a função objetivo diminui indefinidamente seguindo a direção extrema d e caracterizando o seguinte raio: $x = x_1 + \lambda d$ para $\lambda \geq 0$.